M

MATEMÁTICAS 2

serie espiral del saber

Pilar Martínez Téllez
Leticia Contreras Sandoval

SANTILLANA
Secundaria

El libro
Matemáticas 2
de la serie
Espiral del Saber®
fue elaborado en
Editorial Santillana
por el equipo de la
Dirección General
de Contenidos.

Las matemáticas te proporcionan herramientas para resolver [illegible]
y te abren las puertas para el estudio de otras ciencias que te permiten [illegible]
comprender el mundo en que vives.

Este libro fue escrito pensando en ti, para que te des cuenta de que tienes muchas habilidades intelectuales que quizá aún no has descubierto y para que te motives a descubrirlas.

Te invitamos a tener siempre una actitud de exploración y búsqueda, a perder el miedo a equivocarte y a no rendirte hasta encontrar una estrategia para resolver los problemas que se te presentan. Este libro fue escrito para propiciar que explores, que te acostumbres a verificar tus procedimientos y tus resultados y aprendas de tus errores.

Al hacerlo, aprenderás no solamente matemáticas, sino también a confiar en ti mismo, a disfrutar los retos y a percatarte de que tus aptitudes intelectuales son muchas y cada día pueden ser más y mejores. Solo es cuestión de que te atrevas.

Esta obra también fue escrita para fomentar la colaboración entre compañeros, para propiciar que expreses tus ideas, que escuches las de otros, que aprendas a argumentar y que adquieras la capacidad y la costumbre de respetar opiniones distintas de la tuya.

En síntesis, este libro fue escrito para ayudarte a descubrir nuevos campos en el maravilloso mundo de las matemáticas, para contribuir a que desarrolles tu habilidad de razonar, para que te acostumbres a plantearte preguntas y escarbar en las ideas. Pero no solo fue pensado para apoyar tu formación matemática, sino también para favorecer tu formación para la vida.

Nos da gusto que nos permitas ser parte de este gran equipo, integrado por tus maestros, tus padres, nosotras y tú. Uno de nuestros objetivos más importantes es que seas capaz de desarrollar un proceso de aprendizaje continuo que te sea de gran ayuda tanto en este momento como en tus estudios posteriores.

Esperamos que lo disfrutes y te damos la bienvenida a este nuevo ciclo escolar que hoy empieza.

Con cariño,

Las autoras

Índice

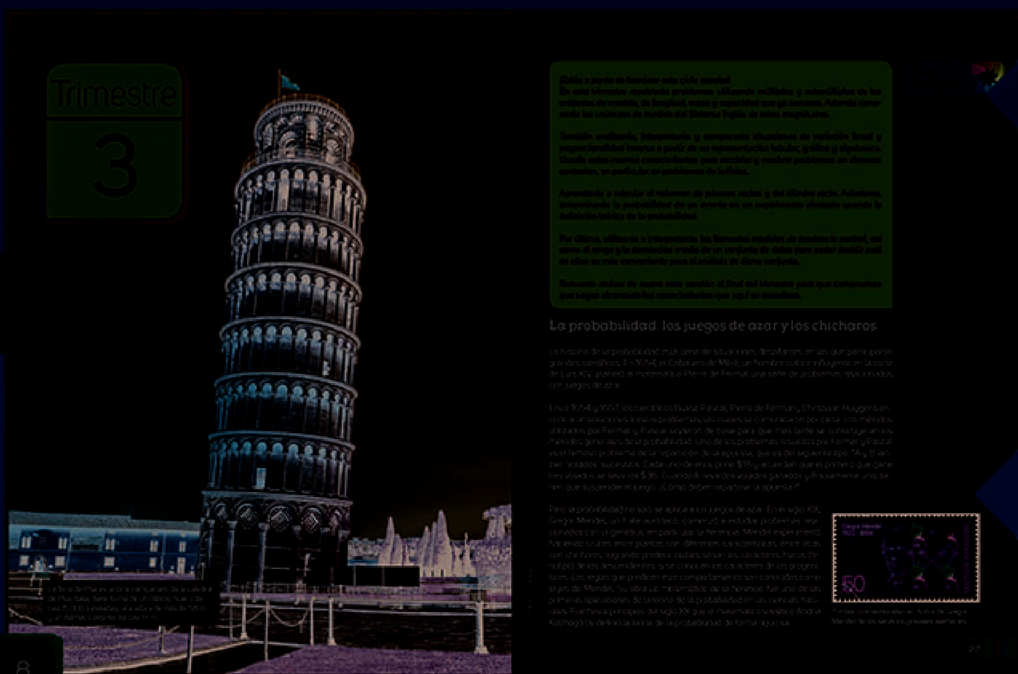
Índice

Panorama de la espiral

A través de la espiral

En esta sección te explicamos cómo trabajarás en el libro, conocerás las ventajas de realizar actividades en pareja, en equipo o de manera grupal durante el curso. También encontrarás una explicación de cómo puedes revisar tus avances y tomar decisiones para poder continuar o regresar y repasar algunos temas con la ayuda de tu profesor y, así, mejorar tu desempeño.

Entremos a la espiral



Al iniciar cada trimestre ingresas en la espiral del aprendizaje. En este apartado tendrás una idea general de los temas que estudiarás los tres meses siguientes.

Cada trimestre encontrarás información para que reflexiones acerca de la importancia de las matemáticas en la historia, para crear soluciones a problemáticas de distintos campos del conocimiento.

Secuencias didácticas

Para lograr los aprendizajes, te proponemos trabajar mediante secuencias didácticas, una serie de actividades que te permitirán lograr conocimientos y desarrollar habilidades y actitudes. Las secuencias didácticas constan de tres fases: Exploro, Construyo y Aplico.

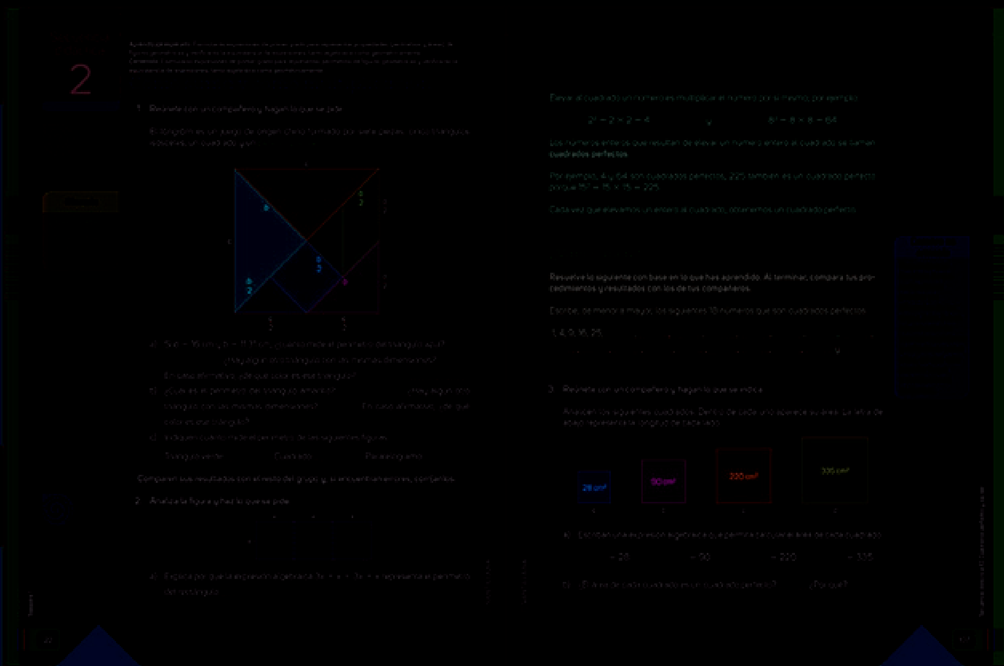
Exploro. En esta fase te introducirás en el tema. Además, identificarás los conocimientos que ya tienes y los que necesitas para continuar aprendiendo.

Construyo. Mediante actividades individuales, en parejas, en equipo, y con la explicación de contenidos por parte de tu maestro, lograrás conocimientos matemáticos y desarrollarás habilidades y actitudes que te permitirán aprender permanentemente.

Aplico. La fase final de la secuencia consta de actividades que integran los aprendizajes. Esto permitirá valorar tus logros. También se incluye una rúbrica para que identifiques tus fortalezas y áreas de oportunidad respecto de lo aprendido.

Durante las secuencias didácticas encontrarás estos apartados:

Para saber más. Encontrarás recomendaciones de páginas web y Libros del Rincón que te servirán para ampliar tus conocimientos y habilidades sobre el tema de la secuencia.

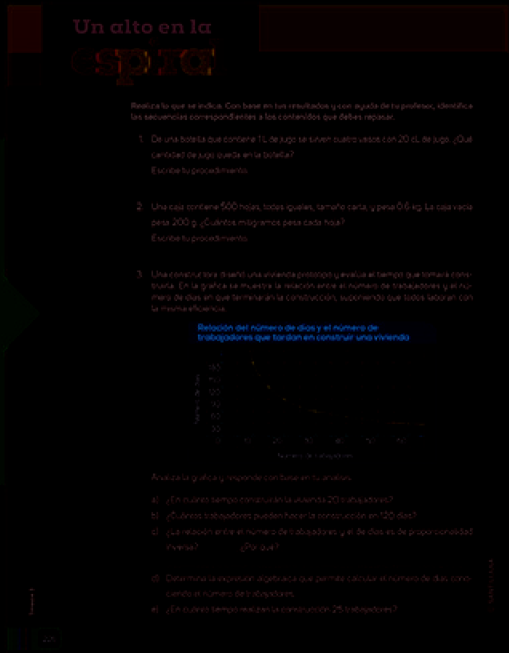


Glosario. Te proporciona la definición de términos matemáticos y de algunas palabras con el fin de facilitarte el estudio de los temas.

¿Vamos bien? En esta sección realizarás ejercicios de práctica sobre los métodos o conceptos que has aprendido hasta el momento.

Convivo en armonía. En este apartado se presentan recomendaciones para una convivencia en armonía dentro y fuera del salón de clases.

Panorama de la espiral



Un alto en la espiral

Cada mes tendrás la oportunidad de detenerte y revisar los aprendizajes que adquiriste mediante la resolución de ejercicios y problemas para que apliques lo que has aprendido.

Taller de tecnología

Practicarás algunos contenidos de las secuencias didácticas con apoyo de la tecnología para que desarrolles tus habilidades digitales.

Giro ascendente

Se trata de actividades diversas que integran lo estudiado durante el trimestre. Será una oportunidad para aplicar los conocimientos, las habilidades y las actitudes que desarrollaste. Con esto demostrarás que has ascendido un nivel en la espiral de tu aprendizaje.

Glosario

Muestra las definiciones ampliadas de las palabras del glosario del interior del libro y las que aprendiste durante el trabajo con las secuencias, para que vuelvas a consultarlas cuando las necesites.

Fuentes de información

Incluye referencias impresas y electrónicas para que consultes información adicional y reafirmes tus conocimientos.

A través de la espiral

Espiral del conocimiento

El desarrollo de la matemática, como el de cualquier otra ciencia, no es una mera acumulación de conocimientos y procedimientos que surgen de modo ordenado, como en línea recta. Este desarrollo tiene más bien la forma de una espiral: de la aplicación o reestructuración de conocimientos anteriores surgen nuevos y más profundos problemas que dan lugar a conocimientos más avanzados. Así, la ciencia está constantemente regresando a temas ya tratados, pero en un nivel cada vez más superior. Y en este ir y venir, se construyen las teorías y las leyes, es decir, el contenido de la ciencia.

En este libro queremos ayudarte a dar una vuelta más en la espiral de tu conocimiento matemático. Con ese objetivo, te presentamos una colección de secuencias con situaciones problemáticas cuidadosamente seleccionadas para contribuir a que lo logres. Cada secuencia incluye problemas que representan un reto para invitarte a poner en juego tus conocimientos previos y a reestructurar dicho saber en el proceso de solución, ya sea para modificarlo o ampliarlo, o para volverlo a aplicar en una situación nueva.

En la espiral

Buscamos que mediante el estudio y el uso de las matemáticas aprendas a razonar, a comprender, a formular hipótesis, a establecer conjeturas y a someter estas últimas al análisis para así obtener nuevas conclusiones. Por ello, te invitamos a recorrer las páginas de este libro con la actitud de aceptar retos y resolver todo tipo de problemas. Tienes completa libertad para construir tu propio procedimiento, incluso puedes actuar con tus compañeros la situación descrita o representarla usando los objetos que tengas a la mano. Lo importante es que estés decidido a poner "manos a la obra" cada vez que las páginas de este libro te propongan un problema.

Es importante que trabajes en equipo, que expliques a tus compañeros cómo obtuviste la solución, que escuches lo que ellos pensaron, que compares tu procedimiento con los suyos, que argumentes tus razones. En resumen: que aprendas a explicar tus razonamientos y a escribir tus ideas de manera ordenada. Ello te permitirá desarrollar la comprensión y la comunicación de nociones matemáticas y ayudará a que adquieras confianza para expresar y justificar tu trabajo matemático.

En este libro encontrarás ejercicios en los que se pretende adquieras la habilidad para realizar de manera eficiente procedimientos técnicos que ya has razonado y comprendido, es decir, ejercicios para practicar. Asimismo, se incluyen sugerencias de cómo usar herramientas tecnológicas para mejorar tu comprensión de los conceptos matemáticos que verás en este curso. Habrá invitaciones a visitar sitios web en los que se presentan actividades interactivas relacionadas con el tema que se está estudiando. También encontrarás talleres en los que te proponemos actividades que se pueden realizar en hojas de cálculo o en un software libre de geometría interactiva. En ambos casos, es muy importante que hagas tu propia exploración de los recursos con los que cuentas y descubras cómo usarlos de manera eficiente.

Cuando trabajas en [illegible] ideas, aportar puntos de vista [illegible] compañeros. Además, puedes fortalecer tu capacidad [illegible] procedimientos.

Por otro lado, hablar de matemáticas es hablar de un sistema muy grande de campos muy variados, cada uno con su propia complejidad. Sin embargo, es importante considerar que así como un árbol tiene ramas, pero un montón de ramas no forman un árbol, tampoco la matemática es un conglomerado de conocimientos aislados de distintos tipos. Por eso, no hemos tratado el contenido del curso basándonos en la división en temas como aritmética, geometría, álgebra, estadística y probabilidad, sino que lo hemos tratado como una unidad. Por ejemplo, encontrarás figuras geométricas para visualizar la equivalencia de expresiones algebraicas de primer grado.

La matemática es una disciplina muy dinámica y con una gran cantidad de aplicaciones. Desde sus orígenes, ha sido un producto social, no el producto exclusivo de la genialidad de alguien, sino el resultado del trabajo y el razonamiento de multitud de personas. Como una forma de invitarte a que investigues y descubras la historia de las matemáticas, al comienzo de cada trimestre te presentamos un texto histórico sobre alguno de los temas que abordarás en ese periodo.

Altos y giros en la espiral

Si el aprender matemáticas es tan dinámico y toma tantas formas, la evaluación de lo que has estudiado no puede ser diferente. En realidad, se requiere una evaluación continua, que realices constantemente con tus propios elementos, con la ayuda de tus compañeros y con el auxilio de tu profesor. Por ello, a lo largo de las secuencias encontrarás muchos momentos en los que se te invita a hacer esta evaluación, la cual te ayudará a mejorar tu aprendizaje.

En los espacios llamados "Un alto en la espiral" te planteamos ejercicios y problemas para que evalúes si has comprendido los contenidos abordados hasta ese momento. También encontrarás una tabla de referencias para que identifiques los contenidos que debes repasar, y otros apartados llamados "Giro ascendente", donde evaluarás los conocimientos que obtuviste durante todo el trimestre.

Te invitamos a asumir la responsabilidad de considerar continuamente si requieres revisar algún contenido. Para auxiliarte en esta tarea, en el inicio de cada trimestre encontrarás un resumen de los conceptos y procedimientos que abordarás. Revisa de nuevo ese texto al terminar el periodo para verificar si los adquiriste todos

Entrada de la torre de Comares en el palacio de La Alhambra en Granada, España. Se puede apreciar la parte inferior de la pared decorada con mosaicos formados por patrones geométricos.

¡Bienvenido a tu segundo curso de Matemáticas!
En este trimestre resolverás problemas que requieran multiplicar y dividir números enteros, fraccionarios y decimales positivos y negativos. Por primera vez verás la multiplicación y la división de números negativos y, analizando ciertas regularidades, obtendrás las llamadas leyes de los signos.

Aprenderás a formular expresiones algebraicas de primer grado para representar sucesiones de números y propiedades de figuras geométricas (perímetros y áreas), además de determinar cuándo dos expresiones son equivalentes.

Construirás polígonos regulares deduciendo y usando las relaciones que existen entre sus ángulos y el número de lados del polígono, y utilizarás estas propiedades para construir mosaicos decorativos.

Conocerás un nuevo tipo de variación proporcional: la proporcionalidad inversa, y resolverás problemas que involucren ambos tipos de variación: directa e inversa.

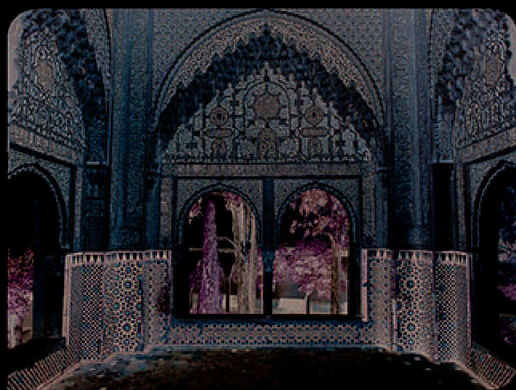
Por último, profundizarás en el análisis y la representación de datos, y aprenderás a construir dos nuevos tipos de gráficas: los histogramas y los polígonos de frecuencia.

Te invitamos a que, al final del trimestre, revises nuevamente esta presentación y te fijes que hayas alcanzado los conocimientos que aquí se describen.

La geometría y el arte

Desde tiempos remotos, la aritmética y la geometría nacieron vinculadas a problemas relacionados con la vida cotidiana del ser humano, como la caza, la pesca, la necesidad de procurarse techo y vestido y la agricultura.

Las primeras nociones geométricas quedaron plasmadas en las pinturas rupestres, en los decorados de vasijas, en la forma de los templos, en el trazo de las ciudades y en el diseño de los más variados utensilios. De todo ello se llegó, tras el paso de muchos años, a las figuras abstractas como son los triángulos, los cuadrados, los polígonos en general y otra inmensa colección de curvas y cuerpos geométricos.


Mirador de Lindajara en el palacio de La Alhambra.

La geometría encierra una indudable belleza artística. Una muestra contundente la tenemos en La Alhambra: un palacio construido entre los años 1230 y 1354 cerca de la ciudad de Granada, en la época de máximo esplendor de la cultura árabe en España, cuyas paredes, techos, pisos, patios y fuentes están decorados majestuosamente con mosaicos que se entrelazan y repiten formando patrones geométricos diversos que llenan esas superficies, y que dejan admirado a cualquier espectador.

Lo más notable es que estos bellísimos patrones geométricos se basan en la repetición y combinación adecuada de figuras simples, como son los triángulos, los cuadrados, los polígonos en general y las líneas rectas y curvas.

Secuencia didáctica
1

Aprendizaje esperado: Verificarás algebraicamente la equivalencia de expresiones de primer grado, formuladas a partir de sucesiones.
Contenido: Verificarás algebraicamente la equivalencia de expresiones de primer grado, formuladas a partir de sucesiones.

¿Son equivalentes?

1. Reúnete con dos compañeros, analicen la sucesión de figuras formadas con cerillos y hagan lo que se pide.

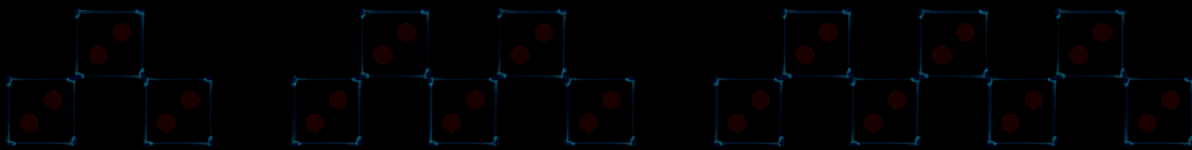


Figura 1 Figura 2 Figura 3

a) ¿Cuántos cuadrados tiene la figura 2? ______

¿Cuántos puntos azules tiene? ______

¿Cuántos cerillos? ______

b) ¿Cuál término de la sucesión tendrá 18 puntos? ______

c) ¿Cuál término de la sucesión tendrá 13 cuadrados? ______

d) Escriban una expresión algebraica para representar el número de cuadrados, puntos y cerillos del término *n* de la sucesión.

Número de cuadrados del término *n*: ______

Número de puntos del término *n*: ______

Número de cerillos del término *n*: ______

Diseñen una estrategia para verificar si sus expresiones son correctas. Si no lo son, identifiquen el error y corríjanlo.

2. Reúnete con un compañero, analicen la sucesión de figuras y hagan lo que se pide.

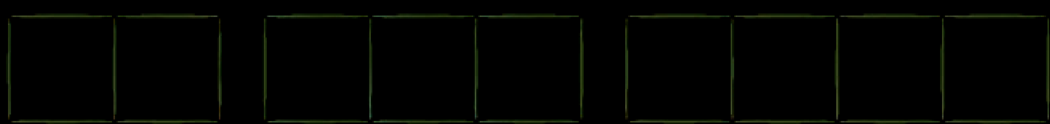


Figura 1 Figura 2 Figura 3

a) Escriban una expresión algebraica que represente la cantidad de cuadrados de la figura *n*. ______

b) Escriban una expresión algebraica que represente la cantidad de palillos que se necesitan para hacer la figura *n*. ______

Discutan con los otros equipos las expresiones algebraicas que obtuvieron en las actividades 1 y 2 y expliquen cómo las formularon. Si algunas no son iguales, analicen si son equivalentes.

Glosario

expresiones algebraicas equivalentes.

3. Reúnete con un compañero y hagan lo que se solicita.

a) Para encontrar la cantidad de palillos de la figura n de la actividad anterior, un equipo consideró que en esa sucesión la figura n tiene $n + 1$ cuadrados, y que para hacer cada nuevo cuadrado se necesitan tres palillos. Los integrantes de ese equipo razonaron del siguiente modo:

Si para cada cuadrado de la figura n *se necesitaran tres palillos, bastaría con multiplicar por 3 la cantidad de cuadrados de la figura* n*. Pero como el primer cuadrado no tiene tres palillos, sino uno más, hay que multiplicar por 3 la cantidad de cuadrados y después sumar 1.*

Escriban la expresión algebraica que representa la cantidad de palillos de la figura n que se obtiene con este razonamiento. ______________________

Convivo en armonía

b) Otro equipo consideró que en la figura 1 hay siete palillos, y que en las siguientes figuras siempre hay tres más que en la anterior.

Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

7 $\quad$ 7 + 3 $\quad$ 7 + 3 + 3 $\quad$ 7 + 3 + 3 + 3

Concluyó entonces que en la figura n la cantidad de palillos es:

$$7 + \overbrace{3 + 3 + 3 + 3 + 3 + \ldots}^{(n-1)\text{ veces } 3} = 7 + (n-1)\text{ veces } 3$$

Escriban una expresión algebraica que represente la cantidad de palillos de la figura n que coincida con esta idea. ______________________

c) El tercer equipo consideró que en la figura 1 el primer cuadrado se hace con cuatro palillos y el otro con tres, y en las demás figuras la cantidad de palillos es la de la figura anterior más tres.

Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

4 + 3 $\quad$ 4 + 3 + 3 $\quad$ 4 + 3 + 3 + 3 $\quad$ 4 + 3 + 3 + 3 + 3

Después, un integrante del equipo 3 se dio cuenta de que en cada figura el número de veces que se suma 3 coincide con el número de la figura.

Escriban una expresión algebraica que represente la cantidad de palillos de la figura n que coincida con esta idea.

d) ¿Son equivalentes las expresiones algebraicas que obtuvieron en los incisos *a*, *b* y *c*? ________ ¿Cómo llegaron a esa conclusión? ________

Comparen las expresiones que obtuvieron con las de los otros equipos. Si encuentran diferencias, detecten a qué se deben y en caso necesario corríjanlas.

4. Reúnete con un compañero, analicen la sucesión de figuras y hagan lo que se pide.

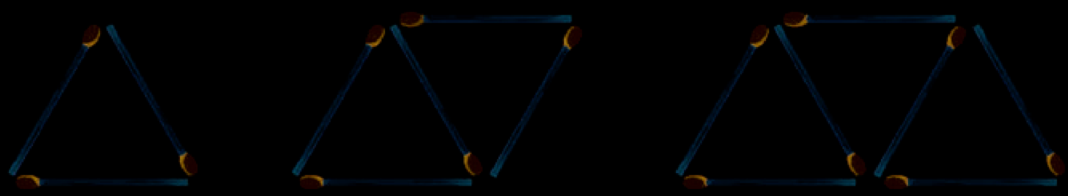


Figura 1 Figura 2 Figura 3

a) ¿Cuántos cerillos tendrá la figura 5? ________ ¿Y la 6? ________
b) ¿Cuántos cerillos tendrá la figura 22? ________
c) Escriban una expresión algebraica que represente la cantidad de cerillos de la figura n de la sucesión. ________
d) ¿La expresión $3 + 2(n - 1)$ representa la cantidad de cerillos de la figura n de la sucesión? ________ ¿Por qué? ________
e) Escriban una tercera expresión algebraica para representar el número de cerillos de la figura n de la sucesión. ________
f) Comprueben que las tres expresiones algebraicas son equivalentes.

Comparen sus resultados y procedimientos con el resto del grupo, y si encuentran expresiones diferentes, comprueben que todas sean equivalentes.

5. Haz lo que se pide.

a) Escribe los primeros cinco términos de la sucesión dada por la regla $1 + 5(n - 1)$.
b) ¿Cuál es el décimo término de la sucesión? ________
c) Escribe los cinco primeros términos de la sucesión dada por la regla $5n - 4$.
d) ¿Cuál es el décimo término de la sucesión? ________

e) ¿Serán equivalentes las expresiones $1 + 5(n - 1)$ y $5n - 4$? ____________

f) Elimina los paréntesis de la primera expresión realizando las operaciones correspondientes y verifica si lo son o no. ____________

____

- Compara tus resultados y procedimientos con el resto del grupo, y si detectas algún error, corrígelo.

En el curso anterior usaste algunas propiedades importantes de los números. Una de estas, la llamada propiedad de la *conmutatividad de la multiplicación*, afirma que el orden de los factores no altera el producto, es decir:

$$a \times b = b \times a$$

o simplemente:

$$ab = ba$$

donde a y b son cualquier par de números.

Otra de las propiedades que usaste es la propiedad de la *distribución de la multiplicación respecto a la suma*. Esta propiedad afirma que al multiplicar la suma de dos o más números por otro número se obtiene el mismo resultado si primero se hace la suma y luego la multiplicación que si primero se hace la multiplicación por cada uno de los sumandos y luego se hace la suma de los resultados. Es decir:

$$a(b + c) = ab + ac$$
$$a(b + c + d) = ab + ac + ad$$
$$\text{etcétera.}$$

Como las literales representan números, esta propiedad también es válida para cualquier expresión algebraica. Así, por ejemplo, $5(x + 9) = 5x + (5 \times 9)$ y $n(3 + 9) = 3n + 9n$.

De la misma forma, si se multiplica la resta de dos números por otro número, se obtiene el mismo resultado si primero se hace la resta y luego la multiplicación que si primero se hace la multiplicación por cada término y luego se hace la resta. Es decir:

$$a(b - c) = ab - ac$$

Cuando en una expresión algebraica aparecen varios sumandos con la misma literal, podemos agruparlos en uno solo realizando las sumas o las restas correspondientes. A este procedimiento se le conoce como simplificación de expresiones algebraicas mediante **agrupación de términos semejantes**.

Por ejemplo, en la expresión algebraica $3x + 7x - 5x$, los términos $3x$, $7x$ y $-5x$ son semejantes. Al realizar las operaciones se obtiene $(3 + 7 - 5)x = 5x$.

¿Vamos bien?

Resuelve lo siguiente con base en lo que has aprendido. Al terminar, compara tus procedimientos y resultados con los de tus compañeros.

I. En tu cuaderno, verifica algebraicamente si las siguientes expresiones son o no equivalentes.

a) $2(x + 5) + 7(3 + x) + 5$ y $9(x + 4)$

b) $4(2a + 1) - 2a$ y $2(3a + 2)$

II. Verifica algebraicamente si las siguientes expresiones representan o no a la misma sucesión.

a) $3(n + 2) + 1$ y $3n + 7$ b) $6(n + 5) + 3(n + 2) + 4$ y $9n + 36$

6. Reúnete con un compañero y hagan lo que se pide.

a) Dibujen en sus cuadernos el quinto término de la siguiente sucesión de figuras.

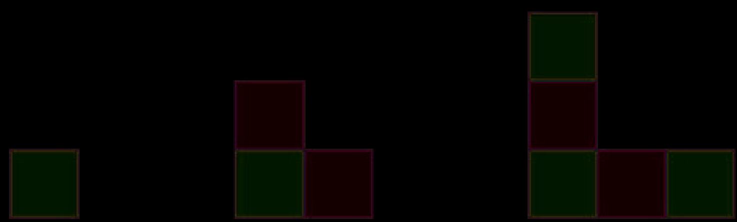


Figura 1 Figura 2 Figura 3

b) Escriban dos expresiones algebraicas que representen el número de cuadrados de la figura n de la sucesión: ____________ y ____________

c) Verifiquen algebraicamente que las expresiones que obtuvieron son equivalentes.

Comparen sus resultados y procedimientos con el resto del grupo. Si detectan errores, corríjanlos.

¿Qué aprendí?

Trabaja los siguientes ejercicios y problemas. Al terminar, revisa tus procedimientos y resultados, primero con ayuda de tus compañeros y luego con tu profesor. Corrige si es necesario.

1. Escribe en tu cuaderno dos expresiones algebraicas equivalentes que representen el número de cuadrados, el número de cerillos y el número de puntos del término n de la sucesión de la actividad 1.

2. Las figuras siguientes son los tres primeros términos de una sucesión.

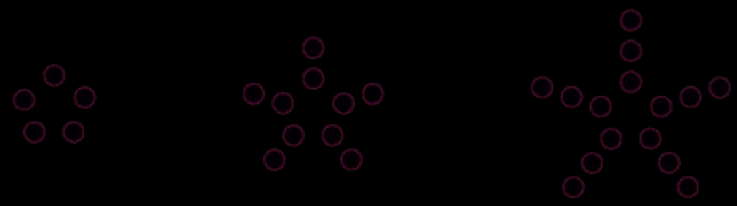


Figura 1 Figura 2 Figura 3

a) ¿Cuántos círculos tendrá el cuarto término de la sucesión? ______________

¿Y el quinto? ______________

b) Escribe una expresión algebraica que represente al término n de esta sucesión.

____

c) ¿Existe otra expresión algebraica que represente al término n de esta sucesión? ________ En caso afirmativo, escríbela. ______________

3. Analiza la sucesión de figuras y dibuja en tu cuaderno la figura que ocupa el quinto lugar.

Figura 1 Figura 2 Figura 3

a) ¿Cuántos cuadrados tendrá la figura que ocupa el décimo lugar? ______________

b) Escribe dos expresiones algebraicas equivalentes que representen al término n de esta sucesión. ______________

4. Analiza la sucesión de números.

$$\frac{3}{2}, \frac{7}{2}, \frac{11}{2}, \frac{15}{2}, \ldots$$

a) Encierra la o las expresiones algebraicas que representen el término n de la sucesión:

$$\frac{3 + 4(n - 1)}{2}, \quad \frac{3 + 4n}{2}, \quad \frac{4n - 1}{2}, \quad \frac{3 + 4(n - 2)}{2}$$

b) Explica cómo obtuviste tu respuesta. ______________

____

____

www.esant.mx/
essema2-001

Marca con una ✓ la casilla que describe tu desempeño.

Verifico algebraicamente la equivalencia de expresiones de primer grado, formuladas a partir de sucesiones.

Nivel de logro		
	A	Requiero ayuda para realizarlo.
	B	Lo hago, pero en ocasiones necesito ayuda.
	C	Lo hago de manera autónoma.

Secuencia didáctica

2

Aprendizaje esperado: Formularás expresiones de primer grado para representar propiedades (perímetros y áreas) de figuras geométricas y verificarás la equivalencia de expresiones, tanto algebraica como geométricamente.
Contenido: Formularás expresiones de primer grado para representar perímetros de figuras geométricas y verificarás la equivalencia de expresiones, tanto algebraica como geométricamente.

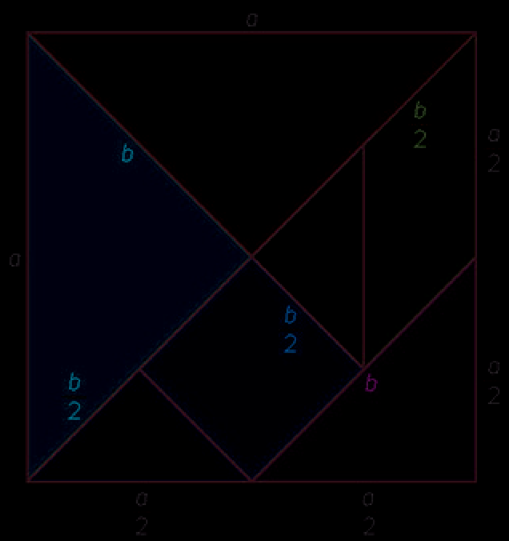
Como suma y como multiplicación

Glosario

paralelogramo.

1. Reúnete con un compañero y hagan lo que se pide.

   El *tangram* es un juego de origen chino formado por siete piezas: cinco triángulos isósceles, un cuadrado y un paralelogramo.



   a) Si $a = 16$ cm y $b = 11.31$ cm, ¿cuánto mide el perímetro del triángulo azul? __________ ¿Hay algún otro triángulo con las mismas dimensiones? __________ En caso afirmativo, ¿de qué color es ese triángulo? __________

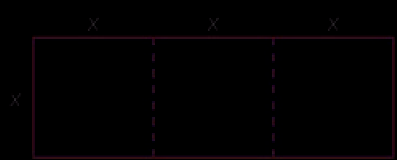
   b) ¿Cuál es el perímetro del triángulo amarillo? __________ ¿Hay algún otro triángulo con las mismas dimensiones? __________ En caso afirmativo, ¿de qué color es ese triángulo? __________

   c) Indiquen cuánto mide el perímetro de las siguientes figuras.

   Triángulo verde: __________ Cuadrado: __________ Paralelogramo: __________

Comparen sus resultados con el resto del grupo y, si encuentran errores, corríjanlos.

2. Analiza la figura y haz lo que se pide.



   a) Explica por qué la expresión algebraica $3x + x + 3x + x$ representa el perímetro del rectángulo. __________

b) Explica por qué la expresión algebraica $2(3x) + 2x$ representa el perímetro del rectángulo. ______

______

c) ¿Qué operaciones debes realizar para obtener la segunda expresión a partir de la primera? ______

d) ¿Y para obtener la expresión $2(3x + x)$ a partir de la anterior? ______

______

e) Escribe otras dos expresiones algebraicas que representen el perímetro del rectángulo. ______

Compara tus respuestas y tus procedimientos con el resto del grupo y después lee la siguiente información.

Las letras que aparecen en las expresiones algebraicas se llaman **literales** y no son abreviaturas, sino números o cantidades desconocidas.

En las expresiones algebraicas, a los números que no varían se les llama **constantes**. Por ejemplo, en la expresión $8x$, 8 es una constante y x es una literal.

En una suma, los números que se suman se llaman **sumandos**. Por ejemplo, $x + x + x + x + x + x + x + x$ es una suma de ocho sumandos en la que cada sumando es la literal x.

En una multiplicación, los números que se multiplican se llaman **factores**. Por ejemplo, $8x$ es una multiplicación de dos factores: el número 8 y la literal x. Y $2(3x + x)$ es una multiplicación en la que un factor es el número 2 y el otro, una suma de dos sumandos: $3x$ y x.

¿Vamos bien?

Resuelve lo siguiente con base en lo que has aprendido. Al terminar, compara tus procedimientos y tus resultados con los de tus compañeros.

Escribe el perímetro de un cuadrado cuyo lado mide $m + j + 2$ unidades en la forma que se indica.

a) Como una suma de dos sumandos ______

b) Como una multiplicación de dos factores en la que uno de los factores sea 4.

______

3. Reúnete con un compañero y hagan lo que se pide.

a) Escriban dos expresiones algebraicas que representen el perímetro de cada polígono del *tangram* de la primera actividad.

Triángulo azul: ______

Triángulo amarillo: ______

Triángulo verde: ______

Cuadrado: ______

Paralelogramo: ______

b) Realicen las operaciones necesarias para verificar que sus expresiones algebraicas son equivalentes. ______

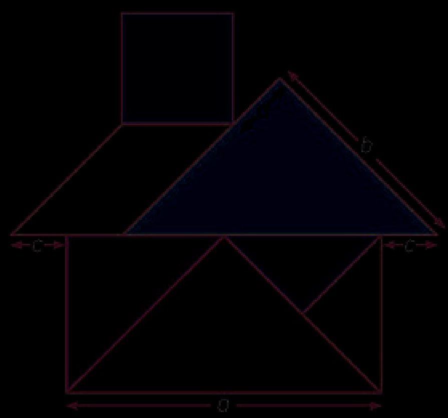
______

______

Comparen sus expresiones con las del resto del grupo y si hay expresiones diferentes de las suyas, escríbanlas en sus cuadernos.

4. Reúnete con dos compañeros y hagan lo que se pide.

a) Reproduzcan el *tangram* en una cartulina o cartón y recorten las siete piezas. Elijan las medidas que quieran para el cuadrado de lado a. Con las piezas, formen la siguiente figura:



b) Si el lado mayor del triángulo rojo y el del triángulo azul miden a unidades y la base del paralelogramo mide $\frac{b}{2}$ unidades, ¿cuál es la medida de $2c$? ______.

¿Cuál es la medida de c? ______

c) ¿Cuál es la medida de d? ______

d) Escriban dos expresiones algebraicas equivalentes que representen el perímetro de la figura. ______

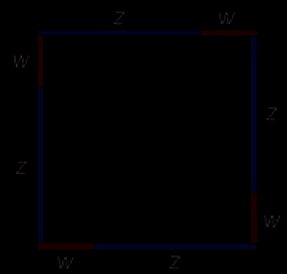
______

Discutan sus respuestas con el resto del grupo y, si hay diferencias, lleguen a un acuerdo. Para verificar la equivalencia, transformen una expresión en la otra.

¿Qué aprendí?

Trabaja los siguientes ejercicios y problemas. Al terminar, revisa tus procedimientos y resultados, primero con ayuda de tus compañeros y luego con tu profesor.

1. En el siguiente cuadrado, cada segmento rojo mide z unidades y cada segmento azul mide w unidades.



Representa el perímetro del cuadrado…

a) como una suma de ocho sumandos. ______

b) como una suma de dos sumandos. ______

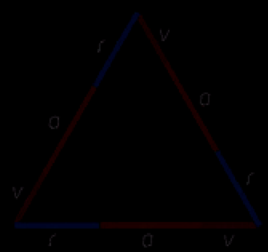
c) como una multiplicación en la que uno de los factores sea 4. ______

d) Si $z = 3w$, escribe una expresión algebraica del perímetro como multiplicación de dos factores en la que uno de ellos sea una constante y el otro sea el número w.

______

e) Verifica que las expresiones algebraicas sean equivalentes. Para eso, realiza en tu cuaderno las operaciones que te lleven de una a otra.

2. En el siguiente triángulo, cada segmento rojo mide r unidades, cada segmento azul mide a unidades y cada segmento verde mide v unidades.



Representa el perímetro del triángulo mediante dos expresiones algebraicas con las siguientes características:

a) Como una suma de tres sumandos en la que cada sumando sea una multiplicación. ______

b) Como una multiplicación en la que uno de los factores sea el número 3.

______

c) Verifica que las expresiones algebraicas sean equivalentes. Para eso, realiza en tu cuaderno las operaciones que te lleven de una a otra.

Marca con una ✓ la casilla que describe tu desempeño.		
[illegible]		
Formulo expresiones de primer grado para representar perímetros de figuras geométricas y verifico la equivalencia de expresiones, tanto algebraica como geométricamente.		
Nivel de logro	A	Requiero ayuda para realizarlo.
	B	Lo hago, pero en ocasiones necesito ayuda.
	C	Lo hago de manera autónoma.

Secuencia didáctica 3

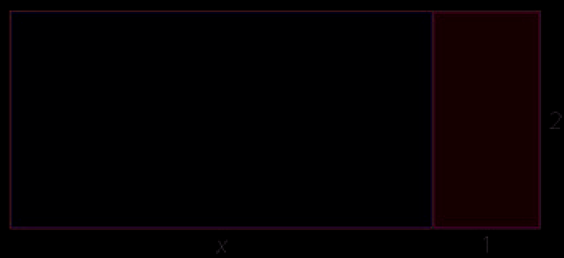
Aprendizaje esperado: Formularás expresiones de primer grado para representar propiedades (perímetros y áreas) de figuras geométricas y verificarás la equivalencia de expresiones, tanto algebraica como geométricamente.
Contenido: Formularás expresiones de primer grado para representar áreas de figuras geométricas y verificarás la equivalencia de expresiones, tanto algebraica como geométricamente.

Más equivalencias

1. Reúnete con un compañero, analicen las figuras y hagan lo que se pide.

   a) ¿Cuál es la medida de la base del rectángulo bicolor? ______
   ¿Cuánto mide su altura? ______

   b) Escriban una expresión algebraica que represente el área del rectángulo bicolor.
   ______



   c) Ahora escriban una expresión algebraica que represente el área del rectángulo amarillo y otra para el área del rectángulo verde y sumen las expresiones. ______
   ______

   d) Comparen la suma de las dos expresiones del inciso *c* con la expresión que obtuvieron en el inciso *b*. ¿Qué relación existe entre ellas? ______
   ______
   ______

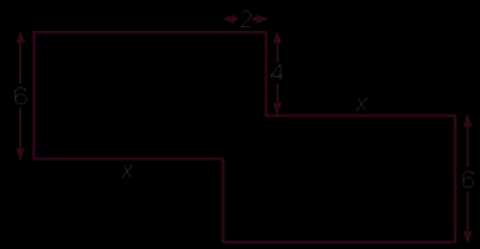
   e) Escriban una expresión algebraica que represente el área de cada uno de los cuadriláteros que componen la siguiente figura.

   Cuadrilátero I: ______ Cuadrilátero III: ______
   Cuadrilátero II: ______ Cuadrilátero IV: ______

   f) ¿Qué relación hay entre estas cuatro expresiones y la que representa el área del rectángulo de base $x + 1$ y altura 2? ______
   ______
   ______

Comparen sus respuestas y sus procedimientos con el resto del grupo y, si detectan errores, corríjanlos.

2. Reúnete con un compañero, analicen el polígono y hagan lo que se pide.



a) Discutan cómo pueden calcular el área del polígono y escriban sus conclusiones.

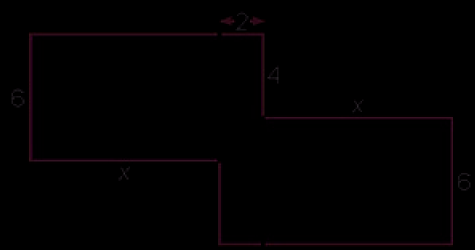
____

____

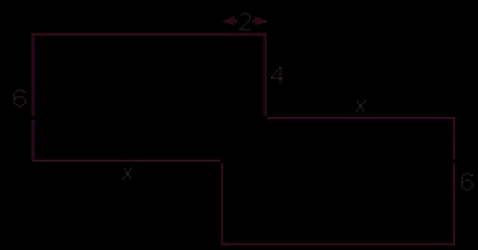
____

b) Observen que el polígono puede dividirse en tres partes de modo que cada una sea un rectángulo.

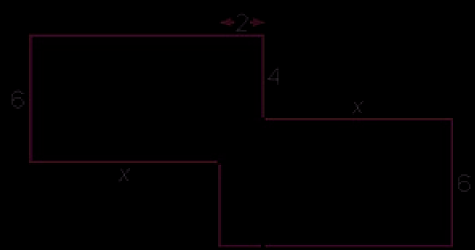
Primera descomposición



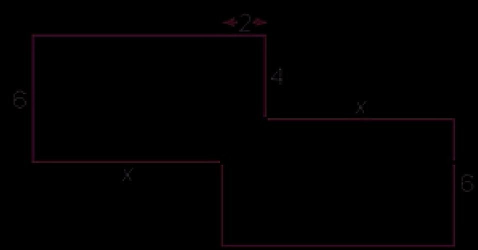
Segunda descomposición



Tercera descomposición



Cuarta descomposición



En cada caso, escriban el área del polígono como una suma de tres sumandos en la que cada sumando represente el área de cada rectángulo en que se descompuso la figura.

Primera descomposición: _______________________________

Segunda descomposición: _______________________________

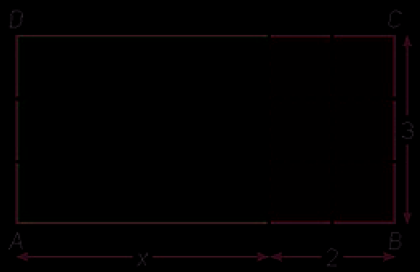
Tercera descomposición: _______________________________

Cuarta descomposición: _______________________________

c) En sus cuadernos realicen las operaciones necesarias para verificar que sus expresiones algebraicas son equivalentes.

Comparen sus respuestas y sus procedimientos con el resto del grupo y, si detectan errores, corríjanlos.

3. Observa la figura de la izquierda y sigue las indicaciones.



a) Escribe una expresión algebraica que represente el área del rectángulo *ABCD* como un producto de dos factores. ____________

b) Usa la propiedad distributiva y escribe la expresión del inciso *a* como una suma de dos sumandos. ____________

c) Ahora escribe una expresión algebraica que represente el área de cada rectángulo color de rosa. ____________

d) Escribe una expresión algebraica que represente el área de cada cuadrado verde.

____

e) Escribe una expresión algebraica que represente el área del rectángulo *ABCD*, como una suma de las áreas de los rectángulos color de rosa y de los cuadrados verdes. ____________

f) ¿Son equivalentes las expresiones obtenidas en los incisos *b* y *e*? ____________

¿Por qué? ____________

- Compara tus respuestas con las de tus compañeros, y si detectas errores, corrígelos.

Cuando en una expresión algebraica aparecen varios sumandos con la misma literal, podemos agruparlos en uno solo realizando las sumas o las restas correspondientes.

A este procedimiento se le conoce como simplificación de expresiones algebraicas mediante **agrupación de términos semejantes**.

Por ejemplo, si a la expresión algebraica $6(x + 2) + 2x + 4(x + 2)$ le aplicamos la propiedad distributiva, obtenemos la expresión $6x + 12 + 2x + 4x + 8$, y al agrupar los términos semejantes llegamos a la expresión algebraica $12x + 20$.

¿Vamos bien?

Resuelve lo siguiente con base en lo que has aprendido. Al terminar, compara tus procedimientos y tus resultados con los de tus compañeros.

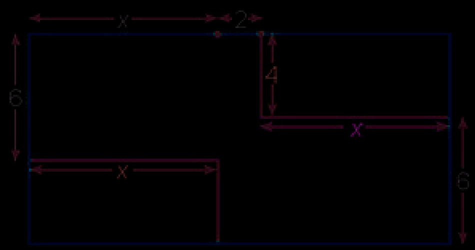
Aplica la propiedad distributiva y agrupa los términos semejantes para verificar que las expresiones algebraicas son equivalentes.

a) $3(x + 4) + 2x - 1$ y $5x + 11$ ____________

b) $2(4x + 1) - 3x$ y $5x + 2$ ____________

4. Reúnete con un compañero y hagan lo que se pide.

El rectángulo de contorno rojo está formado por tres polígonos: el polígono de la actividad 2 y dos rectángulos de las mismas dimensiones.



a) Escriban una expresión algebraica que represente el área del rectángulo de contorno rojo como producto de dos factores. ____________

b) Usen la propiedad distributiva para escribir la expresión anterior como una suma de dos términos. ____________

c) Escriban una expresión algebraica que represente el área del polígono verde como el área del rectángulo rojo menos las áreas de los dos rectángulos azules.

____________ – ____________ – ____________

d) Simplifiquen la expresión del inciso *c* agrupando términos semejantes. ____________

e) Ahora escriban una expresión algebraica que represente el área del polígono verde como el área del rectángulo rojo menos la suma de las áreas de los dos rectángulos azules. Usen la expresión del inciso *d*.

____________ – (____________ + ____________)

f) ¿Son equivalentes las expresiones que escribieron en los incisos *c* y *e*? ____________

¿Por qué? ____________

g) ¿Qué se puede afirmar respecto a las expresiones $-4x - 4x$ y $-(4x + 4x)$?

____

Discutan sus respuestas y sus argumentos con el resto del grupo y, si detectan algún error, corríjanlo.

5. Reúnete con un compañero y llenen los espacios para asociar los términos de manera que las igualdades sean correctas.

a) $2 - 5x + 3 - x = (2 - \_\_\_) + (3 - \_\_\_)$

b) $2 - 5x + 3 - x = (2 + 3) + (\_\_\_ + \_\_\_)$

c) $2 - 5x + 3 - x = (2 - \_\_\_) - (\_\_\_ + x)$

d) $2 - 5x + 3 - x = (2 + 3) - (\_\_\_ + \_\_\_)$

e) ¿La expresión $(1 - x) - (1 - 3x)$ es equivalente a la expresión $2x$? ____________

¿Por qué? ____________

____

Discutan sus argumentos con el resto del grupo y después comparen sus conclusiones con el texto de la siguiente página.

Si a, b y c son números cualesquiera, entonces

$$a - (b + c) = a - b - c$$
$$a - (b + c + d) = a - b - c - d$$

etcétera

Así, por ejemplo, la expresión algebraica $8x + 5z + 20 \quad (2x + 3z + 5)$ es equivalente a la expresión

$$8x + 5z + 20 \quad 2x \quad 3z \quad 5.$$

Y al agrupar los términos semejantes se obtiene la expresión equivalente

$$6x + 2z + 15$$

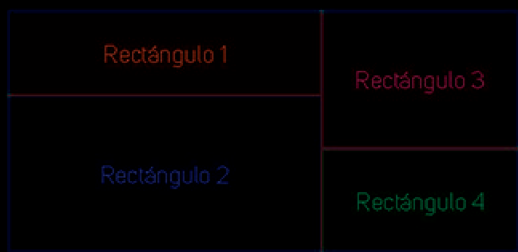
De manera recíproca, la expresión $5x + 2y + 5 \quad x \quad 3y \quad 3$ es equivalente a la expresión

$$5x + 2y + 5 \quad (x + 3y + 3).$$

¿Vamos bien?

Realiza lo que se indica con base en lo que has aprendido. Al terminar, compara tus procedimientos y tus resultados con los de tus compañeros.

I. El rectángulo de contorno rojo está dividido en cuatro rectángulos de distinto tamaño. Llama j al área del rectángulo rojo y k, m y n a las áreas de los rectángulos 1, 2 y 3 respectivamente.



a) Escribe una expresión algebraica que represente el área del rectángulo 4 considerando que esta es el área del rectángulo rojo menos el área de los rectángulos 1, 2 y 3. ______________________________

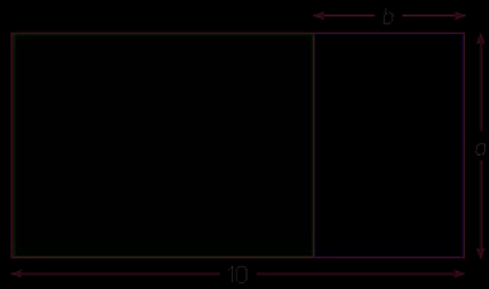
b) Escribe una expresión algebraica que represente el área del rectángulo formado por los rectángulos 1, 2 y 3. ______________________________

c) Escribe otra expresión algebraica para el área del rectángulo 4 restando al área del rectángulo rojo el área del polígono del inciso b. ______________________________

d) Verifica algebraicamente que las expresiones obtenidas en el inciso a y en el inciso c son equivalentes. ______________________________

II. Escribe la expresión $7x + 10y + 11 - (4x + 7y + 2)$ como una multiplicación de dos factores en la que uno de los factores sea 3. ______________________________

6. Analiza la figura y haz lo que se pide.



a) Escribe dos expresiones algebraicas que representen el área del rectángulo color morado.

_______________ y _______________

b) Verifica algebraicamente que tus expresiones son equivalentes realizando las operaciones y agrupaciones necesarias.

____

- Compara tus respuestas y tus procedimientos con el resto del grupo y, si detectas errores, corrígelos.

¿Qué aprendí?

Trabaja el problema. Al terminar, revisa tus procedimientos y tus resultados, primero con ayuda de tus compañeros y luego con tu profesor.

1. Analiza las figuras y responde.

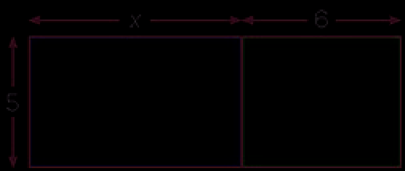


Figura 1

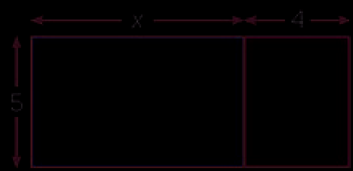


Figura 2

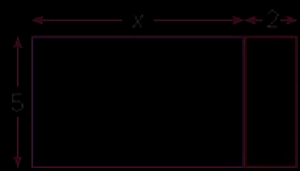


Figura 3

a) Escribe una expresión algebraica que represente el área de cada rectángulo como un producto de dos factores.

Figura 1: _______________

Figura 2: _______________

Figura 3: _______________

b) Escribe una expresión algebraica que represente la suma de las áreas que se indican.

Figuras 1 y 2: _______________

Figuras 1 y 3: _______________

Figuras 2 y 3: _______________

c) Escribe una expresión algebraica que represente el área de la figura 1 menos el área de la figura 3. _______________

d) En tu cuaderno, escribe todas las expresiones algebraicas anteriores como sumas y agrupa los términos para simplificarlas lo más posible.

e) Comprueba que las expresiones correspondientes son equivalentes.

Marca con una ✓ la casilla que describe tu desempeño.

Formulo expresiones de primer grado para representar áreas de figuras geométricas y verifico la equivalencia de expresiones, tanto algebraica como geométricamente.

Nivel de logro		
	A	Requiero ayuda para realizarlo.
	B	Lo hago, pero en ocasiones necesito ayuda.
	C	Lo hago de manera autónoma.

Secuencia didáctica
4

Aprendizaje esperado: Resolverás problemas de multiplicación y división con fracciones y decimales positivos.
Contenido: Resolverás problemas de multiplicación y división con fracciones y decimales positivos.

¿Multiplicas o divides?

1. **Reúnete con un compañero, analicen el texto y respondan.**

En una fábrica de chocolate se tienen que empacar 60 kg de este producto. La mitad se deberá empacar en bolsas de $\frac{1}{5}$ de kg; 20 kg en cajas de $\frac{1}{4}$ de kg, y el resto en cajas de $\frac{1}{2}$ kg. ¿Cuántas bolsas y cuántas cajas de cada tamaño se requieren?

Bolsas de $\frac{1}{5}$ de kg: ______ Cajas de $\frac{1}{4}$ de kg: ______ Cajas de $\frac{1}{2}$ kg: ______

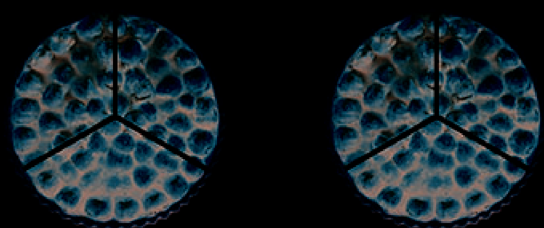
Comparen sus respuestas y procedimientos con el resto del grupo. Si hay diferencias, analícenlas y lleguen a un acuerdo.

2. **Analiza cada enunciado y haz lo que se indica.**

a) Una gelatina de mango se reparte en partes iguales entre tres niños.

¿Qué parte de la gelatina le toca a cada uno? ______ ¿Cuál es el resultado de dividir 1 entre 3? Escríbelo como un número fraccionario. ______

b) Dos tartas se reparten en partes iguales entre tres niños.



¿Qué parte de las tartas le toca a cada niño? ______ ¿Cuál es el resultado de dividir 2 entre 3? Escríbelo como un número fraccionario. ______

c) Dos melones se reparten en partes iguales entre cinco niños. ¿Qué parte de los melones le toca a cada uno? ______ ¿Cuál es el resultado de dividir 2 entre 5? Escríbelo como un número fraccionario. ______

d) ¿Por qué el resultado de la división $30 \div 6 = 6$ no es correcto? ______ ¿Cuál es el resultado correcto? ______ ¿Por qué? ______

e) Completa.

$1 \div 3 =$ ____, porque ____ $\times$ ____ $=$ ____; $2 \div 5 =$ ____, porque ____ $\times$ ____ $=$ ____

f) Haz las operaciones.

$\frac{1}{3} \times 3 =$ ______ $\frac{2}{3} \times \frac{3}{2} =$ ______ $\frac{2}{5} \times \frac{5}{2} =$ ______ $5 \times \frac{1}{5} =$ ______

g) ¿Qué relación hay entre los productos del inciso anterior? ______

h) ¿Qué número multiplicado por $\frac{1}{4}$ da como resultado 1? ______ ¿Qué número multiplicado por 7 da como resultado 1? ______ ¿Por qué número hay que multiplicar $\frac{4}{5}$ para que el resultado sea 1? ______ ¿Por qué? ______

Compara tus procedimientos y respuestas con las de un compañero. Después analicen el siguiente texto.

El inverso multiplicativo o recíproco de un número $\frac{a}{b}$, $a \neq 0$ y $b \neq 0$, es el número $\frac{b}{a}$.

Por ejemplo, si $a = 9$ y $b = 7$, el inverso multiplicativo de $\frac{9}{7}$ es $\frac{7}{9}$, y el de $\frac{8}{15}$ es $\frac{15}{8}$.

Al multiplicar un número por su inverso multiplicativo o recíproco, el resultado siempre es 1.

$$\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = \frac{a \times b}{b \times a} = 1, \quad 7 \times \frac{1}{7} = \frac{7 \times 1}{7} = 1, \quad \frac{8}{15} \times \frac{15}{8} = \frac{8 \times 15}{15 \times 8} = 1$$

Dividir un número entero a entre otro número entero b equivale a multiplicar a por el inverso o recíproco de b:

$$a \div b = a \times \frac{1}{b} = \frac{a \times 1}{b} = \frac{a}{b}$$

Por ejemplo: $18 \div 7 = 18 \times \frac{1}{7} = \frac{18 \times 1}{7} = \frac{18}{7}$

Convivo en armonía

¿Vamos bien?

Realiza lo que se indica a partir de lo que has aprendido. Al terminar, compara tus respuestas con las de tus compañeros. Corrige si hay errores.

I. Escribe el recíproco de cada número.

a) 7 ______ b) $\frac{3}{2}$ ______ c) $\frac{4}{7}$ ______ d) $\frac{9}{8}$ ______

II. ¿Cuál es el recíproco de $\frac{1}{7}$? ______ Explica por qué. ______

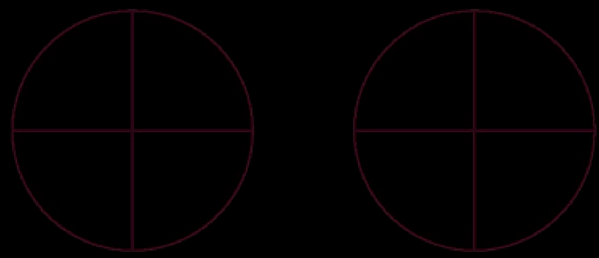
______

III. Escribe los números faltantes en los espacios.

a) $\frac{1}{8} \times$ ___ $= 1$ b) $\frac{35}{2} \times$ ___ $= 1$ c) $18 \div$ ___ $= \frac{18}{5}$ d) $5 \div$ ___ $= \frac{5}{7}$

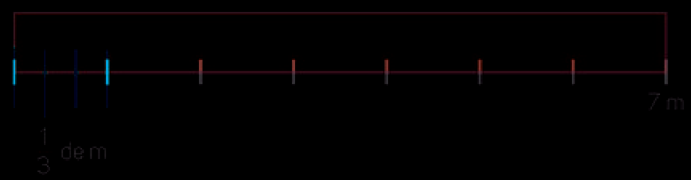
3. Realiza lo que se indica.

a) ¿Cuántas veces cabe $\frac{1}{4}$ en dos enteros? ______________________



Completa: $2 \div \frac{1}{4} =$ __________, porque ______________________

b) ¿Cuántas veces cabe $\frac{1}{3}$ de metro en siete metros? ______________



Completa: $7 \div \frac{1}{3} =$ __________, porque ______________________

c) Resuelve las operaciones.

$3 \div \frac{1}{2} =$ ______________ $4 \div \frac{1}{5} =$ ______________

$7 \div \frac{1}{6} =$ ______________ $1 \div \frac{1}{5} =$ ______________

Discute con tus compañeros el procedimiento que usaste. Analicen los resultados y escriban una regla para dividir un entero a entre una fracción de la forma $\frac{1}{b}$ y compárenla con la siguiente información.

Para dividir un número entero a entre una fracción de la forma $\frac{1}{b}$, se multiplica el entero a por el inverso multiplicativo o recíproco de $\frac{1}{b}$. Esto quiere decir que el resultado de la división es $a \times b$ o simplemente ab.

$$a \div \frac{1}{b} = ab$$

Por ejemplo, $9 \div \frac{1}{4} = 9 \times 4 = 36$ y $5 \div \frac{1}{12} = 5 \times 12 = 60$

4. Reúnete con un compañero, analicen el texto y hagan lo que se indica.

Los siguientes planos son proporcionales; para trazar el plano 2 se multiplicaron las medidas del plano 1 por el factor de proporcionalidad $\frac{1}{2}$; y, para trazar el plano 3 se multiplicaron las medidas del plano 2 por el factor $\frac{1}{3}$.

a) Consideren que $a = 168$ cm y apliquen los factores de proporcionalidad para calcular a' y a''. ______

b) ¿Por cuál factor deben multiplicar a para calcular a'' directamente? ______
Asegúrense de que obtuvieron el factor correcto. Para eso, hagan la operación y verifiquen que se obtiene el valor de a. ______

c) Si $b'' = 14$ cm, ¿por cuál factor deben multiplicar para obtener b'? ______
Hagan la operación y calculen b'. ______ Escriban esta operación como una división. ______
Verifiquen que encontraron el factor correcto aplicando el mismo factor a a'' para obtener a'. ______

d) ¿Por cuál factor deben multiplicar b' para obtener b? ______
Realicen la operación y calculen b. ______
Escriban esta operación como una división. ______

e) ¿Por cuál factor deben multiplicar b'' para calcular directamente b? ______
Hagan la multiplicación y verifiquen que obtienen lo mismo que en el inciso anterior. ______ Escriban esta operación como una división. ______

f) Escriban los números que faltan en las frases.

Si $24 \times \frac{1}{2} =$ ______, entonces ______ $\div \frac{1}{2} = 24$.

Si $6 \div \frac{1}{3} =$ ______, entonces ______ $\times \frac{1}{3} = 6$.

Si ______ $\div \frac{1}{2} = 36$, entonces $36 \times$ ______ $=$ ______.

Si ______ $\times \frac{1}{3} = 14$, entonces $14 \div$ ______ $=$ ______.

Comparen su trabajo con el de sus compañeros. Si hay diferencias, analícenlas con ayuda del profesor, decidan quién está en lo correcto y argumenten por qué.

5. En equipos, analicen la información y hagan lo que se indica.

Óscar jugará al banco y hará sus propios billetes de juguete de \$1000, \$100 y \$50 con hojas de color. Los billetes de cada denominación deben ser de distinto tamaño, pero proporcionales. Las medidas de los billetes de \$1000 se multiplican por el factor $\frac{3}{8}$ para obtener las medidas de los billetes de \$100, y las medidas de un billete de \$100 se multiplican por $\frac{5}{7}$ para obtener las medidas de los billetes de \$50. El ancho de un billete de \$1000 es de 9 cm y el largo de uno de \$50 mide $\frac{255}{56}$ de cm.

a) Analicen la tabla.

	Billete de \$1000	$\times 3$ / $\times \frac{1}{8}$	Billete de \$100	$\times 5$ / $\times \frac{1}{7}$	Billete de \$50
Ancho (cm)	9				
Largo (cm)					$\frac{255}{56}$
2.	$\times$	$\times$		$\times$	$\times$
3.	$\div$	$\div$		$\div$	$\div$

¿Pueden usar la tabla para calcular todas las medidas de los billetes? ______

Expliquen por qué. ______

______

b) Completen la tabla anterior. En los círculos de la parte inferior, en la fila número 2, coloquen el factor por el que hay que multiplicar para pasar de las medidas de un billete a otro, en el sentido de las flechas; y en la fila número 3, escriban entre qué deben dividir.

c) Determinen el factor por el que deben multiplicar para pasar directamente de las medidas de un billete a las de otro.

De \$1000 a \$100: ______

De \$100 a \$50: ______

De \$1000 a \$50: ______

d) Completen la tabla de la siguiente página.

	Billete de \$1000	Billete de \$100	Billete de \$50
Ancho (cm)	9		
Largo (cm)			$\frac{255}{56}$
2.	×	×	
3.	÷	÷	

e) ¿Qué relación hay entre los números que colocaron dentro de los círculos en la fila 2 y los de la fila 3? ______________________

f) Resuelvan las operaciones.

$\frac{2}{3} \div \frac{5}{4} =$ ______________ $\frac{7}{3} \div \frac{2}{5} =$ ______________

g) Completen para comprobar que hicieron correctamente las divisiones anteriores.

$\frac{2}{3} \div \frac{5}{4} =$ ________, porque ________ × ________ = ________

$\frac{7}{3} \div \frac{2}{5} =$ ________, porque ________ × ________ = ________

Analicen sus respuestas y procedimientos con el grupo. Discutan si la multiplicación y la división son operaciones inversas y argumenten por qué. Formulen entre todos una regla para dividir dos fracciones con distintos denominadores y compárenla con el siguiente texto.

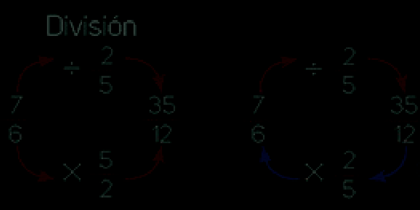
Para dividir dos fracciones, $\frac{a}{m} \div \frac{c}{n}$, multiplicamos $\frac{a}{m}$ por el inverso multiplicativo o recíproco de $\frac{c}{n}$:

$$\frac{a}{m} \div \frac{c}{n} = \frac{a}{m} \times \frac{n}{c} = \frac{a \times n}{m \times c} = \frac{an}{mc}$$

Por ejemplo: $\frac{5}{7} \div \frac{8}{9} = \frac{5}{7} \times \frac{9}{8} = \frac{45}{56}$

Se suelen usar distintos recursos para recordar esta regla. Uno de ellos es la multiplicación cruzada:

$\frac{7}{6} \div \frac{2}{5} = \frac{35}{12}$



Otro es la multiplicación de extremos entre la multiplicación de medios:

$$\frac{\frac{7}{6}}{\frac{2}{5}} = \frac{35}{12}$$

¿Vamos bien?

Realiza lo que se indica con base en lo que has aprendido. Al terminar, compara tus respuestas con las de tus compañeros. Corrijan si hay errores.

I. Haz las divisiones y comprueba tus resultados.

a) $\frac{9}{2} \div \frac{4}{5} =$ ____________, comprobación: ____________

b) $\frac{3}{7} \div \frac{5}{4} =$ ____________, comprobación: ____________

c) $\dfrac{\frac{4}{3}}{\frac{7}{10}} =$ ____________, comprobación: ____________

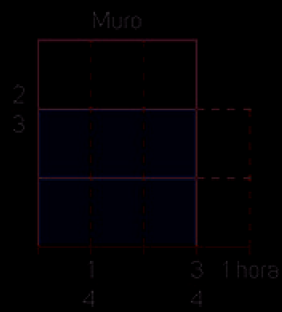
d) $\dfrac{\frac{7}{10}}{\frac{4}{3}} =$ ____________, comprobación: ____________

II. Un rectángulo tiene lados *a* y *b*. El área del rectángulo es de 15 cm². Si el lado *b* mide $\frac{5}{2}$ cm, ¿cuánto mide el lado *a*? ____________

www.esant.mx/essema2-002

6. Haz lo que se indica.

Alexis pintó dos terceras partes de un muro en $\frac{3}{4}$ de hora. Básate en la figura para responder las preguntas de los incisos *a* y *b*, suponiendo que Alexis trabaja al mismo ritmo todo el tiempo.



a) ¿Qué parte del muro pintó en $\frac{1}{4}$ de hora?
____

b) ¿Qué parte pintará en una hora? ____________

c) Tu respuesta en el inciso *b* es el resultado de una división. Escríbela y verifica que obtienes lo mismo. ____________

d) Alexis usó $\frac{4}{5}$ de un bote de pintura para pintar $\frac{16}{5}$ de metros cuadrados de un muro. ¿Cuántos metros pintará con un bote completo? ____________

e) ¿Cuántos recipientes de $\frac{2}{3}$ de litro se pueden llenar con una cubeta de pintura de siete litros? ____________ Convierte este número a fracción mixta. ____________
La pintura que sobró en la cubeta se vació a uno de los recipientes. ¿Qué fracción del recipiente se alcanzó a llenar? ____________

Compara tus respuestas y procedimientos con los de tus compañeros. Si hay diferencias, analícenlas y lleguen a un acuerdo.

¿Qué aprendí?

Trabaja los siguientes ejercicios y problemas. Al terminar, revisa tus procedimientos y resultados, primero con ayuda de tus compañeros y luego con el profesor.

1. Haz las divisiones y comprueba el resultado.

   a) $\frac{8}{7} \div \frac{16}{21} =$ ______ Comprobación: ______

   b) $\frac{7}{8} \div \frac{16}{21} =$ ______ Comprobación: ______

   c) $\frac{5}{6} \div \frac{25}{2} =$ ______ Comprobación: ______

   d) $\frac{5}{6} \div \frac{2}{25} =$ ______ Comprobación: ______

2. Encuentra el valor de x.

   a) $\frac{3}{4} \div x = \frac{6}{5}$ $x =$ ______ b) $x \div \frac{4}{9} = \frac{3}{2}$ $x =$ ______

3. Sofía tiene dos barras y media de queso y venderá paquetes de $\frac{3}{4}$ de barra cada uno.

   a) ¿Cuántos paquetes podrá completar? ______

   b) ¿Qué fracción de barra de queso le sobrará? ______

4. Una jarra contiene $\frac{8}{3}$ de litros de agua.

   a) ¿Cuántos vasos de $\frac{2}{5}$ de litro pueden llenar? ______

   b) ¿Sobra agua en la jarra? ______ Explica por qué. ______

5. Don Joel monta pisos colocando tiras de madera del mismo tamaño, una tras otra, hasta cubrir en línea recta el largo de un piso; después coloca otra línea y así va formando el entarimado. Ayuda a don Joel a calcular cuántas tiras de madera necesita para construir los entarimados.

   a) ¿Cuántas tiras de $\frac{1}{3}$ de m necesita para un piso de 3 m? ______
   ¿Y para uno de $\frac{14}{3}$ de m? ______

   b) ¿Cuántas tiras de $\frac{3}{5}$ de m necesita para un piso de 7 m? ______
   ¿Qué fracción de la tira de $\frac{3}{5}$ de m requiere para cubrir el último tramo del piso de 7 m? ______

6. Luis corre $\frac{25}{2}$ kilómetros en $\frac{5}{6}$ de hora. Suponiendo que mantiene la misma rapidez todo el tiempo, ¿cuántos kilómetros recorrerá en una hora? ______

www.esant.mx/essema2-003

Marca con una ✓ la casilla que describe tu desempeño.

Resuelvo problemas de multiplicación y división con fracciones y decimales positivos.

Nivel de logro

A Requiero ayuda para realizarlo.

B Lo hago, pero en ocasiones necesito ayuda.

C Lo hago de manera autónoma.

Secuencia didáctica 5

Aprendizaje esperado: Resolverás problemas de multiplicación y división con fracciones y decimales positivos.
Contenido: Resolverás problemas de multiplicación y división con fracciones y decimales positivos.

Divide y multiplicarás

Convivo en armonía

1. Reúnete con un compañero para jugar. Lean en qué consiste el juego y sigan las instrucciones.

   Cada uno lance un dado. El que obtenga mayor puntuación elige uno de los cuadros siguientes e inicia la primera partida.

Jugador 1		
÷ 2.5	→	
÷ 0.222	→	
÷ 0.24	→	
Total		

Jugador 2		
÷ 0.25	→	
÷ 2.22	→	
÷ 1.24	→	
Total		

   En cada partida, por turnos, cada jugador lanza dos dados y forma una fracción con los números que le salgan (él decide qué número toma como numerador y cuál como denominador). Luego escribe la fracción como dividendo de una de las divisiones de su cuadro y el cociente correspondiente en la casilla del lado derecho. Después de tres partidas se suman los tres cocientes y gana quien obtenga el número mayor. Cada jugador revisa las divisiones del otro. Recuerden que en la división $a \div b = c$, a es el dividendo, b el divisor y c el cociente.

   Describan cómo se hace una división cuando uno de sus elementos es una fracción y otro es un número decimal. ______________________________

   ____

Revisen sus divisiones haciendo la comprobación correspondiente.

2. Trabaja de manera individual.

   Lucía vende moños. Tiene 4 carretes de listón. En la tabla se muestra la cantidad de listón en cada carrete y la cantidad necesaria para hacer los moños de cada color.

	Rojo	Verde	Azul	Amarillo
Metros en cada carrete	$5\frac{1}{2}$	$6\frac{3}{4}$	9.25	$16\frac{1}{2}$
Cantidad en metros para hacer un listón	$\frac{2}{3}$	$1\frac{1}{3}$	$1\frac{1}{4}$	2.4
Número de moños que se pueden hacer				

a) Completa la tabla anterior.

b) Describe cómo se desarrolla la división cuando aparece una fracción mixta.

____

____

Glosario

fracción mixta.

- Revisa tu trabajo. Comprueba que el número de moños multiplicado por el de la cantidad de listón para hacer un moño es igual a la cantidad de listón en el carrete correspondiente. De no ser así, encuentra el error y corrígelo.

3. Sigue las instrucciones y contesta.

a) Haz las operaciones. Reduce las fracciones.

$8 \div 2 =$ ____	$\frac{2}{3} \div \frac{1}{5} =$	$\frac{4}{21} \div \frac{2}{15} = \quad =$
$24 \div 6 =$ ____	$\frac{6}{3} \div \frac{3}{5} = \quad =$	$\frac{4}{7} \div \frac{2}{5} = \quad =$

b) ¿Qué relación hay entre los cocientes de las operaciones en cada tabla? ____________

c) ¿Por cuál número se multiplicó o dividió el divisor y el dividendo de las divisiones de la primera fila para obtener las de la segunda fila en cada tabla? ____________

____

____

d) Escribe el elemento de la división que falta para que el resultado sea siempre el mismo en cada tabla. Realiza las operaciones para que verifiques que el cociente es igual en cada caso.

A	
$12 \div 4 = 3$	$24 \div$ ____ $=$ ____
____ $\div 2 =$ ____	$4 \div \frac{4}{\quad} =$ ____

B	
$\frac{4}{5} \div \frac{3}{2} = \frac{8}{15}$	$\frac{\quad}{5} \div \frac{9}{2} =$
$\frac{4}{25} \div \frac{3}{\quad} =$	$\frac{\quad}{25} \div \frac{9}{10} =$

e) ¿Qué relación hay entre los dividendos de las cuatro divisiones de cada tabla?

A ____

B ____

f) ¿Qué relación hay entre los divisores de las cuatro divisiones de cada tabla?

A ____

B ____

g) Escribe dos divisiones que tengan el mismo resultado y haz las operaciones para que verifiques que, en efecto, el cociente es igual.

____

h) ¿Qué hiciste para encontrar las divisiones anteriores? ______________________

____

Compara tu trabajo con el de un compañero y comprueben que resolvieron correctamente las divisiones. Analicen el siguiente texto y, después, regresen y revisen lo que hicieron. Si encuentran algún error, corríjanlo.

Dada una división, si multiplicamos o dividimos el dividendo y el divisor por un mismo número, obtenemos otra división con el mismo cociente que la original. Por ejemplo:

$$\left(\frac{5}{7} \times 4\right) \div \left(\frac{3}{4} \times 4\right) = \frac{20}{7} \div \frac{12}{4} = \frac{80}{84} = \left(\frac{5}{7} \div 4\right) \div \left(\frac{3}{4} \div 4\right) = \frac{5}{28} \div \frac{3}{16} = \frac{80}{84}$$

¿Vamos bien?

Realiza lo que se indica con base en lo que has aprendido. Al terminar, compara tus respuestas con las de tus compañeros.

Usa la propiedad anterior para completar los espacios.

a) $25.385 \div \frac{5}{2} =$ ________ $\div \frac{5000}{2} =$

b) $\frac{3}{2} \div 0.5 = \frac{\quad}{4} \div 7 =$

4. Haz lo que se indica.

a) Aplica la propiedad anterior para escribir cada división como otra, donde el número decimal sea un número entero y haz las operaciones.

$8.5 \div \frac{2}{5} =$ ______________ $25.76 \div \frac{5}{2} =$ ______________

$\frac{8}{3} \div 0.24 =$ ______________________________

b) Ahora convierte a fracción decimal cada número decimal del inciso anterior, sustitúyelo en las divisiones y realiza las operaciones.

$\div \frac{2}{5} =$ ______________ $\div \frac{5}{2} =$ ______________

$\frac{8}{3} \div \quad =$ ______________________________

Verifica que hayas obtenido el mismo resultado que en el inciso anterior.

Comprueba el resultado que obtuviste en las divisiones. De no ser correcto, encuentra el error y corrige.

¿Qué aprendí?

Analiza el planteamiento de cada problema y resuélvelo. Al terminar, revisa tus respuestas con la ayuda de tu profesor. Corrige si es necesario.

1. En un establecimiento le aceptaron a Ángel su vieja bicicleta a cuenta de una nueva. Por su bicicleta le ofrecieron \$2 325.40 y la nueva cuesta \$6 544.15, y le dieron la oportunidad de pagar en 15 plazos de una semana.

   ¿Cuánto debe pagar Ángel semanalmente? ______

2. Un auto viaja a rapidez promedio constante y recorre 324.75 kilómetros en $2\frac{3}{4}$ de hora. ¿Cuántos kilómetros recorrió en una hora? ______

3. Al lado de una vereda de 158.22 m de largo se quieren plantar árboles cada $3\frac{3}{8}$ de m. ¿Cuántos árboles se plantarán? ______

4. En una tienda está la siguiente oferta:

OFERTA

Bebida chica ($\frac{1}{4}$ de litro).......................... \$6.75

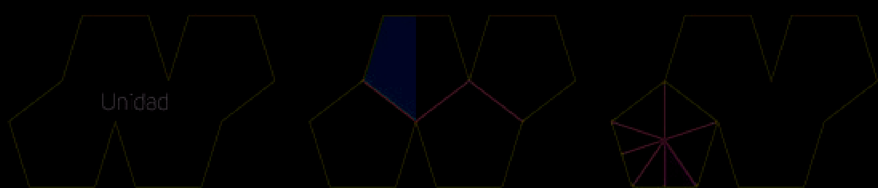
Bebida mediana ($\frac{3}{4}$ de litro).......................... \$19.50

Bebida grande ($1\frac{1}{4}$ de litro) \$33.50

   ¿En cuál de las presentaciones es más barata la bebida? ______

   Explica por qué. ______

5. ¿Cuántos cuadriláteros rojos de área 0.125 unidades cuadradas se necesitan para cubrir un área de $\frac{17}{20}$ de unidad formada por triángulos verdes? ______



6. Un comerciante utiliza 1.25 L de tintura roja para teñir $26\frac{3}{4}$ de m^2 de tela.

   a) ¿Cuánta usará para teñir un metro cuadrado? ______

   b) El comerciante tiene un bote de tintura azul con 58.5 L, y usa $3\frac{3}{4}$ de L para teñir un rollo de tela. ¿Para cuántos rollos iguales le alcanzará la tintura? ______

Marca con una ✓ la casilla que describe tu desempeño.

Resuelvo problemas de multiplicación y división con fracciones y decimales positivos.

Nivel de logro		
	A	Requiero ayuda para realizarlo.
		Lo hago, pero en ocasiones necesito ayuda.
	C	Lo hago de manera autónoma.

Un alto en la espiral

Realiza lo que se indica. Con base en tus resultados, y con ayuda de tu profesor, identifica las secuencias correspondientes a los contenidos que debes repasar.

1. La siguiente sucesión de figuras está formada por polígonos regulares de lado x. Escribe una expresión algebraica que represente el perímetro de cada figura.

Figura 1 | Figura 2 | Figura 3 | Figura 4

______ ______ ______ ______

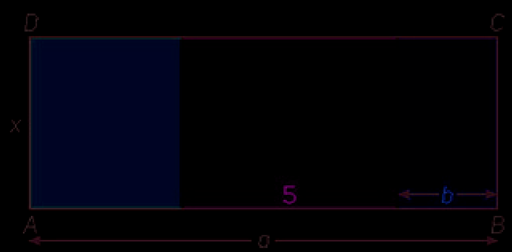
a) ¿Cuántos lados tiene el polígono de la figura n? ______

b) Escribe una expresión algebraica que represente el perímetro del polígono de la figura n. ______

c) Escribe una expresión algebraica que represente el perímetro del polígono de la figura n, si $x = 4$. ______ Escribe esta expresión como un producto de dos factores, uno de estos igual a 2. ______
Ahora escríbela como un producto de dos factores con uno igual a 4. ______

d) Desarrolla las operaciones necesarias para verificar que las tres expresiones del inciso c son equivalentes. ______

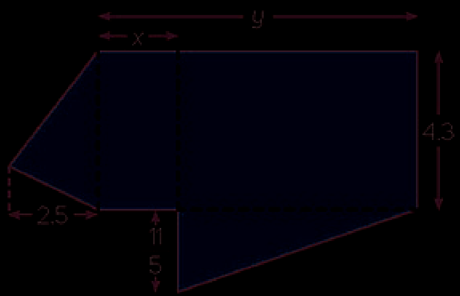
2. Analiza la figura y escribe dos expresiones algebraicas equivalentes que representen lo que se indica en cada caso. Verifica la equivalencia.



a) El perímetro del rectángulo $ABCD$ ______

b) El área del rectángulo rojo ______

3. En la figura se dan algunas longitudes en centímetros. ¿Cuántos centímetros cuadrados tiene el área de la figura? Reduce lo más posible tu respuesta.



4. Analiza la sucesión.

$$\frac{14}{5}, \frac{26}{5}, \frac{38}{5}, \frac{50}{5}, \frac{62}{5}, \ldots$$

a) Subraya las expresiones algebraicas que representan el término n de la sucesión.

$$\frac{3(4n+2)-4}{5}, \qquad \frac{2(3n+4)-4}{5}, \qquad \frac{2(6n+1)}{5}, \qquad \frac{12n-2}{5}$$

b) Desarrolla las operaciones necesarias para verificar que las expresiones subrayadas son equivalentes.

5. En la escuela de Aarón, durante una campaña de higiene dental, se repartió una botella de 1.35 L de flúor en envases con $\frac{5}{48}$ de L. ¿Cuántos envases se repartieron?

6. El lado mayor de un rectángulo es $\frac{25}{3}$ de cm y su área es de $31\frac{1}{4}$ de cm^2. Calcula la longitud del otro lado del rectángulo.

7. En un partido de basquetbol, Ramiro anotó 18 puntos, que representan $\frac{3}{9}$ de los puntos anotados por su equipo. ¿Cuántos puntos en total obtuvo su equipo?

8. Un automóvil recorrió 191.25 km en dos horas y cuarto; y una motocicleta recorrió 67.5 km en tres cuartos de hora. ¿Cuál de los vehículos viajó a mayor rapidez? Explica por qué.

Reflexiona sobre tus resultados y, con tu profesor, busca estrategias para fortalecer tus áreas de oportunidad.

En la columna "Nota", marca una ✓ en los reactivos que resolviste correctamente.

[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1		1 y 2	16-25
2		2 y 3	22-31
3		3	26-31
4		1	16-21
5		4 y 5	32-43
6		4 y 5	32-43
7		4 y 5	32-43
8		4 y 5	32-43

Secuencia didáctica
6

Aprendizaje esperado: Resolverás problemas de multiplicación y división con números enteros, fracciones y decimales positivos y negativos.
Contenido: Resolverás problemas de multiplicación con números enteros.

¿Qué signo tiene?

1. Lee y responde con un compañero.

En un concurso sobre conocimientos de distintos temas se plantean diez preguntas a varios participantes. Por cada respuesta correcta, los concursantes ganan 2 puntos y por cada respuesta incorrecta pierden 3 puntos.

a) Completen la tabla considerando la información anterior.

Nombre del participante	Preguntas correctas	Preguntas incorrectas	Puntos obtenidos
Héctor	8	2	
Gustavo	6	4	
Mónica	5	5	
Sofía			15
Enrique			−15

b) ¿Algún concursante pudo haber terminado con 4 puntos? __________

Expliquen su respuesta. __________

Expliquen a sus compañeros cómo llegaron a cada respuesta y comparen con ellos sus procedimientos y sus resultados. Lleguen a un acuerdo sobre cuáles son correctos.

2. Haz lo que se indica.

a) Desarrolla las multiplicaciones como sumas repetidas de números iguales.

$6 \times 5 =$ __________

$5 \times 6 =$ __________

b) Escribe el resultado de las sumas.

$-3 + (-3) + (-3) + (-3) =$ __________

$-4 + (-4) + (-4) =$ __________

c) ¿Cuál es el resultado de las multiplicaciones?

$4 \times (-3) =$ __________ $3 \times (-4) =$ __________

d) ¿Qué relación hay entre los resultados que encontraste en los incisos *b* y *c*?

e) Escribe el resultado de $(-3) \times 4 =$ __________

¿Coincide con algún resultado del inciso *c*? _____ ¿Con cuál? _____

f) Haz las operaciones.

$2 \times 6 =$ ______ $5 \times 7 =$ ______

$-2 \times 6 =$ ______ $5 \times (-7) =$ ______

Compara tus respuestas con las de tus compañeros. Usen la calculadora para validar sus resultados y discutan qué signo tiene el resultado de multiplicar un número positivo por uno negativo.

3. Trabaja con un compañero en lo siguiente.

a) Escriban el resultado correspondiente debajo de cada multiplicación.

8×3	8×2	8×1	8×0	$8 \times (-1)$	$8 \times (-2)$	$8 \times (-3)$

b) Analicen la sucesión formada por los resultados. ¿Qué operación deben hacer a cada término para obtener el siguiente? ______

c) Escriban el resultado de las siguientes multiplicaciones:

$8 \times (-4) =$ ______ $8 \times (-5) =$ ______

$8 \times 0 =$ ______ $0 \times 8 =$ ______

d) Observen los resultados de las primeras cuatro multiplicaciones de la tabla.

-8×3	-8×2	-8×1	-8×0	$-8 \times (-1)$	$-8 \times (-2)$	$-8 \times (-3)$
-24	-16	-8	0			

e) ¿Qué operación deben hacer a cada término para obtener el siguiente? ______

f) Completen los resultados de las multiplicaciones de la tabla anterior y las siguientes.

$-8 \times (-4) =$ ______ $-8 \times (-6) =$ ______

Las multiplicaciones también se pueden escribir usando paréntesis, sin el símbolo $\times$. Por ejemplo, $5 \times (-2)$ puede escribirse como $(5)(-2)$ o $5(-2)$.

g) Completen la siguiente tabla con los resultados de las multiplicaciones.

$(3)(-2)$	$(2)(-2)$	$(1)(-2)$	$(0)(-2)$	$(-1)(-2)$	$(-2)(-2)$	$(-2)(-3)$
			0			

Discutan sus respuestas con el resto del grupo y, si hay diferencias, analícenlas y lleguen a un acuerdo.

4. Trabaja de manera individual.

a) Escribe en cada celda el producto correspondiente.

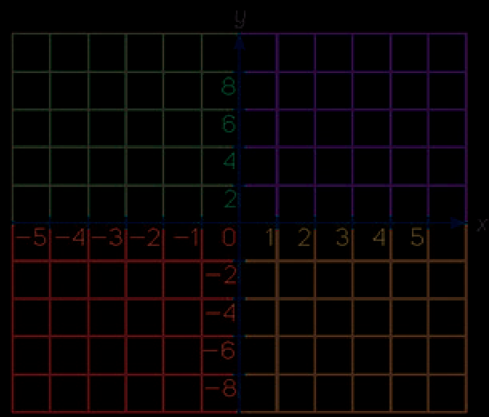
×	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
4							8			
3										
2		−6								
1										
0					0					
−1										
−2										
−3										
−4										
−5										

b) Escribe el color de las regiones donde el resultado del producto es positivo. Recuerda que 5 = +5. ________________ ¿Qué signo tienen los números que se multiplican en esas regiones? ________________

c) Escribe el color de las regiones donde el resultado del producto es negativo. ________________ ¿Qué signo tienen los números que se multiplican en esas regiones? ________________

d) Multiplica por −2 los valores de la columna *x* y escribe el resultado en la columna *y*. Escribe los puntos, con las coordenadas correspondientes, en la columna (*x*, *y*).

x	*y*	(*x*, *y*)
4		*A*
2		*B*
0		*C* (0, 0)
−1		*D*
−3		*E* (−3, 6)
−4		*F*



¿De qué color es la región del plano donde se localizan los puntos *A* y *B*? ________

¿Y donde se localizan los puntos *D*, *E* y *F*? ________________

Reúnete con un compañero y comparen sus trabajos. Lleguen a un acuerdo sobre el signo que debe tener el resultado de multiplicar dos números negativos y dos positivos. Compárenlo con el texto de la siguiente página.

Glosario

números enteros.

Si se multiplican dos números enteros del mismo signo (ambos positivos o ambos negativos), el resultado es un número positivo.

$$(+a)(+b) = +ab = ab \qquad a \text{ y } b \text{ números naturales}$$
$$(-a)(-b) = +ab = ab$$

Si se multiplican dos números enteros de distinto signo, el resultado es un número negativo.

$$(+a)(-b) = -ab \qquad a \text{ y } b \text{ números naturales}$$
$$(-a)(+b) = -ab$$

Si se multiplica el cero por cualquier número entero a, el resultado es cero.

$$(0)(a) = 0 \quad \text{y} \quad (0)(-a) = 0$$

Por ejemplo:

$$(8)(8) = 64, \qquad (-6)(-6) = 36$$
$$(-8)(8) = -64, \qquad (6)(-6) = -36$$
$$(0)(3) = 0, \qquad (0)(-3) = 0$$

A estas reglas se les llama **leyes de los signos**.

5. Sigue las instrucciones.

a) Escribe en las casillas del cuadro A los números −2, 2, 3, 4 y 5, de manera que al sumar los números de cada columna, de cada fila y cada diagonal, el resultado sea siempre 3.

	−3	
	1	−1
		0

A

B

C

b) Multiplica por 5 los números de cada casilla del cuadro A y escribe el resultado en la casilla correspondiente del cuadro B. ¿Cuál es el resultado de la suma de cada columna, renglón y diagonal? ____________ ¿Qué relación tiene esa cantidad con la del cuadro A? ____________

c) Ahora multiplica por −2 el número de cada casilla del cuadro A y escribe el resultado en la casilla correspondiente del cuadro C. ¿Cuál es el resultado de la suma de cada columna, fila y diagonal? ____________ ¿Qué relación tiene esa cantidad con la del cuadro A? ____________

Verifica tus respuestas comparándolas con las de un compañero.

¿Vamos bien?

Resuelve lo siguiente con base en lo que has aprendido. Al terminar, compara tus procedimientos y tus resultados con los de tus compañeros.

I. Haz las operaciones.

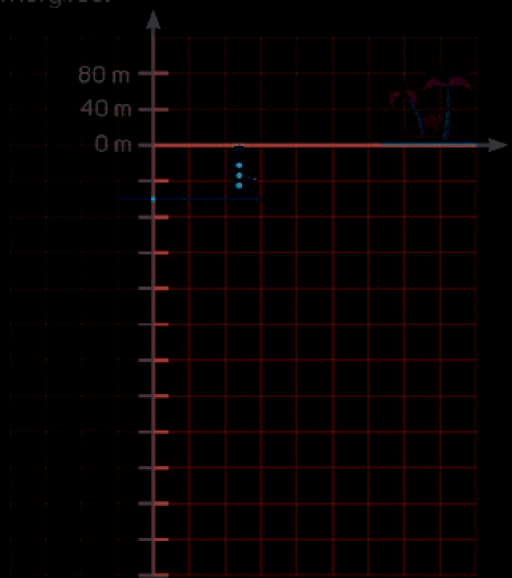
a) $(1)(-1) =$ ______
b) $(-1)(1) =$ ______
c) $(-1)(-1) =$ ______
d) $(6)(-9) =$ ______
e) $(15)(10) =$ ______
f) $(-8)(-7) =$ ______
g) $(-12)(-6) =$ ______
h) $(-9)(4) =$ ______
i) $(13)(8) =$ ______
j) $(-7)(21) =$ ______

II. Escribe los números que faltan.

a) $-2 \times$ ______ $= 8$
b) ______ $\times 7 = -35$
c) $6 \times$ ______ $= 54$
d) ______ $\times (-12) = 72$

6. Revisa el texto y el esquema. Después haz lo que se indica.

Un submarino que está 60 metros bajo el nivel del mar se sumerge a una rapidez de 80 metros por minuto. En la ilustración se representa la ubicación del submarino antes de empezar a sumergirse.



a) Asigna a la recta roja el número que le corresponde.
b) Localiza la ubicación que tendrá el submarino 5 minutos después de iniciar el descenso y asígnale el número que le corresponda.
c) ¿Qué operación realizaste para determinar el número del inciso anterior? ______

______

Revisa tu trabajo con un compañero. Si tienen diferencias, usen argumentos para convencerse de qué es lo correcto.

¿Qué aprendí?

Trabaja los siguientes ejercicios y problemas. Al terminar, revisa tus procedimientos y resultados, primero con ayuda de tus compañeros y luego con tu profesor.

1. Determina dos números que...

   a) sumados den -9 y multiplicados den 20. ______

   b) sumados den -1 y multiplicados den -20. ______

   c) sumados den 1 y multiplicados den -20. ______

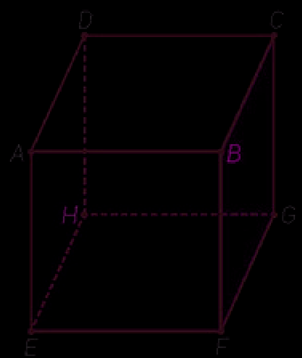
   d) sumados den 9 y multiplicados den 20. ______

2. Determina dos números que sumados den cero y su producto sea negativo (menor que cero) ______ y ______ ¿Qué relación hay entre estos números? ______

   ______

3. Una cámara de frío se encuentra a -5 grados Celsius y la temperatura desciende a razón de 3 grados por minuto. ¿Cuál será la temperatura después de 12 minutos? ______ ¿Y después de 25? ______

4. A cada vértice de un cubo como el de la derecha se le asigna un número: puede ser 1 o -1, y a cada cara se le asigna el producto de sus cuatro vértices.



   a) Si los vértices *A*, *B*, *C* y *D* tienen el número 1 y los vértices *E*, *F*, *G* y *H* tienen el número -1, ¿cuánto suman los números correspondientes a las caras del cubo?

   ______

   b) Si los vértices *A*, *B*, *C*, *D*, *E* y *H* tienen valor 1 y los demás -1, ¿cuánto suman los números de las caras?

   ______

   c) Escribe tres formas distintas de asignar los números de los vértices de manera que la suma de los números de las caras sea 0. ______

   ______

   ______

5. **Escribe, de dos formas distintas, cada número como el producto de dos factores.**

   a) $-15 = ($ ______ $)($ ______ $)$ y $-15 = ($ ______ $)($ ______ $)$

   b) $-3 =$ ______ y $-3 =$ ______

   c) $35 =$ ______ y $35 =$ ______

www.esant.mx/essema2-004

Marca con una ✓ la casilla que describe tu desempeño.

Resuelvo problemas de multiplicación con números enteros.

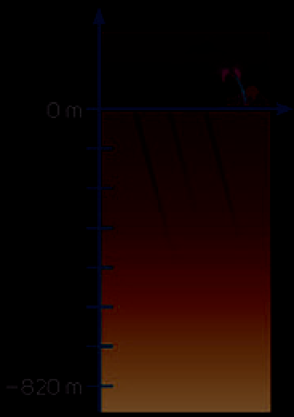
Nivel de logro		
	A	Requiero ayuda para realizarlo.
		Lo hago, pero en ocasiones necesito ayuda.
	C	Lo hago de manera autónoma.

Secuencia didáctica
7

Aprendizaje esperado: Resolverás problemas de multiplicación y división con números enteros, fracciones y decimales positivos y negativos.
Contenido: Resolverás problemas de división con números enteros.

¡Cuidado con los signos II!

1. Lee la información y realiza lo que se indica.



Un robot sumergible teledirigido busca un submarino extraviado. El robot partió de la superficie, se adentró en el mar y se detuvo siete veces a intervalos iguales. En cada parada hizo grabaciones y llegó a 820 m de profundidad. En el esquema se representan los niveles donde se fue deteniendo el robot, así como los 820 m bajo el nivel del mar a donde llegó.

a) En la imagen, escribe el número que corresponde a cada punto donde se detuvo el robot.

b) ¿Qué distancia recorrió el robot entre cada parada? ________

c) ¿Cuál piensas que es el resultado de dividir -820 entre 7? ____

Comenta con tus compañeros las respuestas y el procedimiento que siguieron para encontrar la distancia recorrida por el robot entre cada parada.

2. Reúnete con un compañero y hagan lo que se pide.

a) Escriban en los espacios los números que faltan.

$24 \div 12 =$ ______, porque $12 \times$ ______ $= 24$

$4 \times$ ______ $= 36$, así que $36 \div 4 =$ ______

$6 \times$ ______ $= 48$, así que $48 \div 6 =$ ______

$9 \times$ ______ $= -99$, así que $-99 \div 9 =$ ______

$-3 \times$ ______ $= -24$, así que $-24 \div (-3) =$ ______

$-7 \times$ ______ $= 63$, así que $63 \div (-7) =$ ______

b) ¿Qué signo tiene el resultado de las divisiones de números que tienen el mismo signo? ________________ ¿Qué signo tiene el resultado de las divisiones de números con signo distinto? ________________

Verifiquen sus resultados de las operaciones con la calculadora y compárenlos con los de sus compañeros. Si hay diferencias, analícenlas y lleguen a un acuerdo.

3. Haz lo que se indica.

a) Escribe los números que faltan.

$-15 \times \frac{-1}{15} =$ ______ $\qquad -15 \times \frac{1}{-15} =$ ______ $\qquad -15 \times \left(- \quad\right) = 1$

b) ¿Qué relación hay entre los números $\frac{-1}{15}$, $\frac{1}{-15}$ y $-\frac{1}{15}$? ________________

c) Completa la tabla.

Número	$\frac{1}{4}$		9		-3		-12		$\frac{1}{17}$
Recíproco		$\frac{1}{-15}$		$\frac{1}{7}$		$-\frac{1}{25}$		$\frac{-1}{44}$	

Glosario

recíproco o inverso multiplicativo de un número x.

d) Si un número tiene signo positivo (+), ¿cuál es el signo de su recíproco? ________ ________________ Si un número tiene signo negativo (−), ¿cuál es el signo de su recíproco? ________________

e) Haz las divisiones y escríbelas como un producto. Después completa los enunciados.

División	Cociente	Como producto
$-12 \div 3 =$		$= -12 \times$
$-25 \div (-5) =$		$=$
$60 \div (-15) =$		$=$
$-44 \div (-11) =$		$=$

- "Al dividir dos números enteros con mismo signo, el signo del resultado es ____________". Explica por qué. ________________

- "Al dividir dos números enteros con signo distinto, el signo del resultado es ____________". Explica por qué. ________________

Compara tu trabajo con el de tus compañeros. Si encuentran alguna diferencia, analícenla y lleguen a un acuerdo. Comparen su acuerdo con el siguiente texto.

Un número y su recíproco siempre tienen el mismo signo.
Como la división $a \div b$ es el producto de a por el recíproco de b: $a \div b = a \times \frac{1}{b}$, de la ley de los signos para la multiplicación, se deduce que:

- Si se dividen dos números enteros del mismo signo, el resultado es un número positivo.
  $\frac{(+a)}{(+b)} = +c \qquad \frac{(-a)}{(-b)} = +c,$ a, b y c números naturales
- Si se dividen dos números enteros de distinto signo, el resultado es un número negativo.
  $\frac{(+a)}{(-b)} = -c \qquad \frac{(-a)}{(+b)} = -c,$ a, b y c números naturales

Por ejemplo: $\frac{8}{-2} = -4, \qquad \frac{-8}{-2} = 4, \qquad \frac{-8}{2} = -4, \qquad \frac{8}{2} = 4$

¿Vamos bien?

Resuelve lo siguiente con base en lo que has aprendido. Al terminar, compara tus procedimientos y tus resultados con los de tus compañeros.

I. Haz las operaciones.

a) $17 \div (-1) =$ ____________

b) $-54 \div 54 =$ ____________

c) $-63 \div (-9) =$ ____________

d) $64 \div (-8) =$ ____________

e) $-32 \div 16 =$ ____________

f) $-32 \div (-16) =$ ____________

g) $\frac{-90}{-5} =$ ____________

h) $\frac{276}{92} =$ ____________

i) $\frac{300}{-15} =$ ____________

j) $\frac{81}{-3} =$ ____________

II. Una cámara de refrigeración industrial que tiene una temperatura de 2 °C, disminuye su temperatura a razón de 4 °C por minuto. ¿Cuántos minutos le toma llegar a −18 °C? ____________

Convivo en armonía

4. Haz lo que se indica con un compañero.

a) Al multiplicar un número entero por 2 y restar 4 al resultado, se obtiene −10. ¿Cuál es el número? ____________

b) Escriban una adivinanza que corresponda a la ecuación $-3x + 7 = -20$.

____

____

c) Encuentren la solución de la ecuación y, a su vez, de la adivinanza. ____________

d) Al dividir un número entero por 4, el resultado es −20. ¿Cuál es ese número?

____

e) Al dividir un número entero por 4 y restar 7 al resultado, se obtiene −12. ¿Cuál es el número? ____________

f) Al dividir un número entero por 9 y sumar 4 al resultado, se obtiene −68. ¿Cuál es ese número? ____________

g) Escriban una adivinanza que corresponda a la ecuación $\frac{x}{3} - 5 = -11$. ____________

____

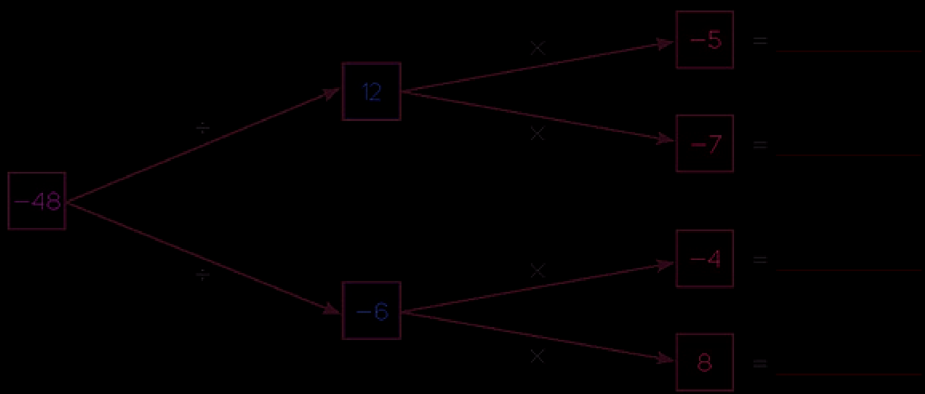
h) Encuentren la solución de la ecuación y, a su vez, de la adivinanza. ____________

Revisen sus respuestas y sus procedimientos comparándolos con los de sus compañeros. Si hay algún error, discútanlo en grupo y corríjanlo.

¿Qué aprendí?

Trabaja los siguientes ejercicios y problemas. Al terminar, revisa tus procedimientos y tus resultados, primero con ayuda de tus compañeros y luego con tu profesor.

1. Escribe el resultado al final de cada rama del diagrama.



2. En un laboratorio se debe mantener una sustancia a una temperatura de −30 °C. En el momento de meterla en un refrigerador, se encontraba a −12 °C. Si en el refrigerador la temperatura de la sustancia baja a razón de 3 °C por hora, ¿en cuántas horas alcanzará la temperatura deseada? ____________________

3. En el momento de un apagón, un congelador industrial estaba a −32 °C. El suministro eléctrico se reestableció 8 horas después y el congelador estaba a −8 °C.

   a) ¿Cuántos grados aumentó la temperatura del congelador durante las 8 horas?

   ____

   b) ¿Cuánto aumentó la temperatura del congelador cada hora? ____________________

4. En las casillas vacías del cuadro A, coloca los números −30, −15, 15, 30, 45, 60 y 75, de forma que, al sumar en fila, columna y diagonal, el resultado sea siempre 90.

		0
	90	

A

B

¿Entre qué número hay que dividir el valor de cada casilla del cuadro A para que, después de escribir el resultado en la casilla correspondiente del cuadro B, al sumar filas, columnas y diagonales, el resultado sea siempre −18?

www.esant.mx/essema2-005

Marca con una ✓ la casilla que describe tu desempeño.

Resuelvo problemas de división con números enteros.

Nivel de logro		
	A	Requiero ayuda para realizarlo.
	B	Lo hago, pero en ocasiones necesito ayuda.
	C	Lo hago de manera autónoma.

Secuencia didáctica

8

Aprendizaje esperado: Resolverás problemas de multiplicación y división con números enteros, fracciones y decimales positivos y negativos.
Contenido: Resolverás problemas de multiplicación y división de fracciones y decimales positivos y negativos.

¡Cuidado con los signos II!

1. Lee con un compañero y respondan.

   a) ¿Qué fracción multiplicada por 6 da como resultado 5? ____________

   b) Encuentren una fracción que multiplicada por 6 dé como resultado -5.
   ____

   c) ¿Qué fracción multiplicada por -6 da como resultado 5? ____________

   d) Determinen la fracción que multiplicada por -6 da como resultado -5.
   ____

   e) Busquen un número decimal que multiplicado por 5 dé como resultado -6.
   ____

   f) ¿Qué número decimal multiplicado por -5 da como resultado -6?
   ____

   g) Si un número se multiplica por -5 y al resultado se le resta 3, se obtiene 6. ¿Cuál es ese número? ____________

Discutan sus respuestas con sus compañeros y comparen los procedimientos que usaron. Asegúrense de identificar las respuestas correctas.

2. Resuelve las ecuaciones.

   a) $-1.5x = -6$

   $x =$ ____________

   b) $\frac{y}{2.2} = -5$

   $y =$ ____________

   c) $-\frac{2}{3}z = 1$

   $z =$ ____________

   d) $-2.5 = \frac{t}{-4}$

   $t =$ ____________

Verifica tus respuestas comparándolas con las de algún compañero.

- Si los dos números tienen el mismo signo, el resultado de su multiplicación o división es un número positivo.

Esto es, si *a* y *b* son números fraccionarios o decimales positivos, entonces:

$$(+a)(+b) = +ab \qquad (-a)(-b) = +ab \qquad \frac{+a}{+b} = +\frac{a}{b} \qquad \frac{-a}{-b} = +\frac{a}{b}$$

Ejemplos:

$$(-3.4)(-2.5) = 8.5 \qquad (3.4)(2.5) = 8.5$$

$$\frac{1}{3} \div \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{6} \qquad -\frac{1}{3} \div -\frac{2}{3} = -\frac{1}{3} \times \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{6}$$

- Si los dos números tienen signo contrario, el resultado de su multiplicación o división es un número negativo.

Es decir, si *a* y *b* son números fraccionarios o decimales positivos, entonces:

$$(+a)(-b) = -ab \qquad (-a)(+b) = -ab \qquad \frac{+a}{-b} = -\frac{a}{b} \qquad \frac{-a}{+b} = -\frac{a}{b}$$

Ejemplos:

$$(-3.4) \times (2.5) = -8.5 \qquad 3.4 \times (-2.5) = -8.5$$

$$\frac{1}{3} \div -\frac{2}{3} = \frac{1}{3} \times \left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{6} \qquad -\frac{1}{3} \div \frac{2}{3} = -\frac{1}{3} \times \frac{3}{2} = -\frac{3}{6}$$

¿Vamos bien?

Resuelve lo siguiente con base en lo que has aprendido. Al terminar, compara tus procedimientos y tus resultados con los de tus compañeros.

Realiza las operaciones.

a) $\frac{9}{4} \times \left(\frac{-2}{5}\right) =$ ____________

b) $-2.5 \times (-3.8) =$ ____________

c) $-5 \times \frac{5}{7} =$ ____________

d) $-25.64 \div 2.5 =$ ____________

e) $-\frac{2}{7} \div \frac{2}{9} =$ ____________

f) $\frac{1}{5} \div \left(-\frac{4}{5}\right) =$ ____________

g) $-\frac{7}{2} \div \left(-\frac{2}{7}\right) =$ ____________

h) $-8.5 \div \left(-\frac{3}{4}\right) =$ ____________

Glosario

jerarquía de las operaciones

3. Realiza las operaciones.

   Considera que al operar con números positivos y negativos, se aplica la jerarquía de las operaciones que estudiaste en primer año, únicamente toma en cuenta los signos y opera de acuerdo con las reglas anteriores.

   a) $-2.5 \times (3 - 7) =$

   b) $(4.1 \times (-2.2)) \div (-1) =$

   c) $-2.5 \times (3 - 7) - (4.1 \times (-2.2)) \div (-1) =$

   d) $\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{8}{8} \div \left(-\frac{2}{3}\right)\right) =$

   e) $\left(-\frac{1}{4} \times \frac{4}{7}\right) \div \left(-\frac{6}{7}\right) =$

   f) $\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{8}{8} \div \left(-\frac{2}{3}\right)\right) + \left(-\frac{1}{4} \times \frac{4}{7}\right) \div \left(-\frac{6}{7}\right) =$

   g) $-\{(3.6 + 4) \times [1.8 \times (-5.1 + 3.9)]\} =$

Comparen sus respuestas con las de sus compañeros y corrijan si encuentran algún error.

4. Reúnete con un compañero, analicen cada expresión y escriban los números que faltan en los espacios.

   a) $-\frac{8}{9} \times \frac{\quad}{\quad} = \frac{4}{9}$

   b) $\frac{5}{3} \div \frac{\quad}{\quad} = -2$

   c) $-\frac{8}{3} \div \frac{\quad}{\quad} = \frac{16}{9}$

   d) $\frac{\quad}{3} \div \frac{1}{9} \times \frac{1}{\quad} = -\frac{3}{2}$

   e) $\frac{4}{3} \times \frac{12}{5} \div \frac{\quad}{\quad} = -\frac{5}{13}$

   f) $3.5 \times$ _____ $= -5.25$

   g) $-2.5 \div$ _____ $= 2.5$

   h) $-5.2 \times$ _____ $\div 1.5 = 11.44$

   i) $\frac{8}{7} \times \frac{6}{\quad} \times \frac{-1}{4} = \frac{3}{2}$

   j) $-\frac{2}{3} \div \frac{2}{5} \times \frac{\quad}{\quad} = \frac{5}{12}$

Comparen su trabajo con el resto del grupo. En caso de haber diferencias, discútanlas y lleguen a un acuerdo sobre cuáles son las respuestas correctas.

5. En parejas, planteen las ecuaciones que se indican.

   a) Una ecuación que tenga como solución $x = -\frac{1}{2}$. ______________________

   b) Una ecuación que tenga por solución $y = -3.5$. ______________________

   c) Una ecuación en la que se usen fracciones y decimales cuya solución sea $z = -3$.

   ____

Revisen las ecuaciones en grupo y verifiquen que todas cumplan las condiciones que se solicitan.

¿Qué aprendí?

Trabaja los siguientes ejercicios y problemas. Al terminar, revisa tus procedimientos y resultados, primero con ayuda de tus compañeros y luego con tu profesor.

1. Realiza la operación.

$$-\left[\left(\frac{4}{5}+\frac{3}{4}\right)\div\left(\frac{2}{3}-\frac{4}{5}\right)\right]\times\left(\frac{1}{2}\div\frac{-3}{2}\right)+\frac{2}{5}\times\frac{3}{2}=$$

2. Resuelve las diez operaciones y asocia cada resultado con la letra correspondiente. No olvides simplificar los resultados cuando sea posible.

1. $\dfrac{\frac{5}{7}\left(-\frac{1}{5}\right)}{\frac{3}{4}} =$ ______________

2. $\dfrac{2.8\,(1.2)}{-3} =$ ______________

3. $\dfrac{-\frac{6}{5}\left(-\frac{7}{6}\right)}{7} =$ ______________

4. $\dfrac{-2.5\,(-5)}{-2} =$ ______________

5. $\dfrac{-\frac{2}{7}\left(\frac{4}{5}\right)}{-\frac{6}{5}} =$ ______________

6. $\dfrac{-12.5\,(5.5)}{-11} =$ ______________

7. $\dfrac{\frac{3}{5}\left(-\frac{4}{3}\right)}{4} =$ ______________

8. $\dfrac{-4.2\,(-2.1)}{-6} =$ ______________

9. $\dfrac{\frac{1}{7}\left(-\frac{1}{5}\right)}{-\frac{1}{8}} =$ ______________

10. $\dfrac{-2\,(1.4)}{-2.5} =$ ______________

Clave

A	C	E	M	N	O	P	R	S	U
-1.12	$-\frac{4}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	6.25	-6.25	-1.47	$\frac{8}{35}$	1.12

Descifra el mensaje secreto colocando la letra correspondiente al resultado de cada operación anterior.

__ __ __ __   __ __   __ __ __ __ __ __ __

5 8 5 9   10 7   1 2 3 4 5 6 7

Marca con una ✓ la casilla que describe tu desempeño.

Resuelvo problemas de multiplicación y división de fracciones y decimales positivos y negativos.

Nivel de logro

- A Requiero ayuda para realizarlo.
- Lo hago, pero en ocasiones necesito ayuda.
- C Lo hago de manera autónoma.

Un alto en la espiral

Realiza lo que se indica. Con base en tus resultados, y con ayuda de tu profesor, identifica las secuencias correspondientes a los contenidos que debes repasar.

1. El producto de los números a y b es menor que cero. ¿Qué signo pueden tener a y b?

____

2. Completa y escribe cada producto como una suma o como una resta. Después haz las operaciones y escribe el resultado final.

a) $-3(9 - 8) = -(3)(\_\_\_\_) + (3)(8) =$ ____________

b) $-5(-6 - 4) = (\_\_\_\_)(\_\_\_\_)\_\_\_\_(\_\_\_\_)(\_\_\_\_) =$ ____________

c) $5(-9 - 6) = (\_\_\_\_)(\_\_\_\_)\_\_\_\_(\_\_\_\_)(\_\_\_\_) =$ ____________

3. Realiza las operaciones.

a) $57 \div (-19) =$ ____________

b) $-116.1525 \div (-4.25) =$ ____________

c) $\frac{196.168}{-12.4} =$ ____________

4. Desarrolla las operaciones indicadas sobre cada flecha y escribe el resultado en el cuadro siguiente. Al final, reduce las fracciones a su mínima expresión.

a) $\boxed{-\frac{2}{3}} \xrightarrow{\times\left(-\frac{5}{4}\right)} \boxed{} \xrightarrow{\div\left(-\frac{2}{7}\right)} \boxed{} = \boxed{}$

b) $\boxed{\frac{5}{3}} \xrightarrow{\div\left(-\frac{2}{5}\right)} \boxed{} \xrightarrow{\times\left(-\frac{3}{4}\right)} \boxed{} = \boxed{}$

5. En la siguiente tabla, al sumar las expresiones de cada fila, se obtiene el mismo resultado, es decir, se obtienen expresiones algebraicas equivalentes.

Sumandos			Suma
$\frac{2}{3}\left(a - \frac{5}{4}b\right)$	$12 - \frac{23}{6}b$	$\frac{5}{2}\left(\frac{4}{3}a - \frac{4}{3}b\right)$	
$-2(a - 2)$	$-4(2b - a)$	$2(a + 4)$	
$\frac{3}{7}\left(\frac{9}{2}a - \frac{8}{5}b\right)$	$-4\left(\frac{64}{35}b - 1\right)$	$\frac{1}{7}\left(\frac{29}{2}a + 56\right)$	

a) Escribe en la tabla el resultado de cada suma.

b) Desarrolla las operaciones necesarias para comprobar la equivalencia de las tres sumas.

6. En una mina, la altura de cada nivel es de 2.5 metros. El piso del primer nivel se encuentra a -2.5 m de la superficie terrestre; el piso del segundo nivel, a -5 m, y así sucesivamente.

a) En un carrito se transporta material desde la superficie terrestre hasta el nivel 35. ¿A qué distancia de la superficie llega el carrito? ____________

b) Una cuadrilla de mineros realiza trabajos a -32.5 m de la superficie terrestre. ¿En qué nivel se encuentra la cuadrilla? ____________

c) Un minero está a -55 m de la superficie terrestre y sube hasta llegar a -15 m. ¿Cuántos niveles ascendió? ____________

7. El regulador de una cámara frigorífica se descompuso, quedó encendido y bajó la temperatura a un ritmo de 2.5 °C por hora.

a) ¿Cuánto tiempo pasará para que la temperatura baje 12 °C? ____________

b) Si en el momento en que dejó de funcionar el regulador, la temperatura era de -1.5 °C, ¿en cuánto tiempo la temperatura llegará a -12.75 °C? ____________

8. Conforme se asciende sobre la tierra, la temperatura de la tropósfera (capa de la atmósfera más próxima a la superficie terrestre) desciende aproximadamente 0.65 °C por cada 100 metros de altitud. Si la temperatura a nivel del mar es de 0 °C en un momento en que un globo meteorológico se encuentra a 450 m de altitud, ¿qué temperatura registra el globo? Escribe tu procedimiento.

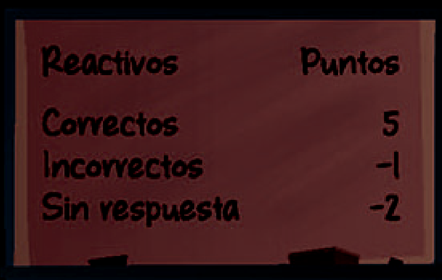
____

____

En la columna "Nota", marca una ✓ en los reactivos que resolviste correctamente.

1		6	46-51
2		6	46-51
3		7 y 8	52-59
4		8	56-59
5		8	56-59
6		8	56-59
7		8	56-59
8		7 y 8	52-59
9		7	52-55

9. Ana presentó un examen en el que los reactivos contestados de forma incorrecta y los no contestados tenían una puntuación. El examen tenía 100 reactivos en total.



Ana tuvo -30 puntos por reactivos incorrectos y -42 por reactivos que no respondió. Si el examen se aprueba con un mínimo de 150 puntos, ¿pasó Ana el examen? Argumenta tu respuesta.

____

____

Reflexiona sobre tus resultados y, con tu profesor, busca estrategias para fortalecer tus áreas de oportunidad.

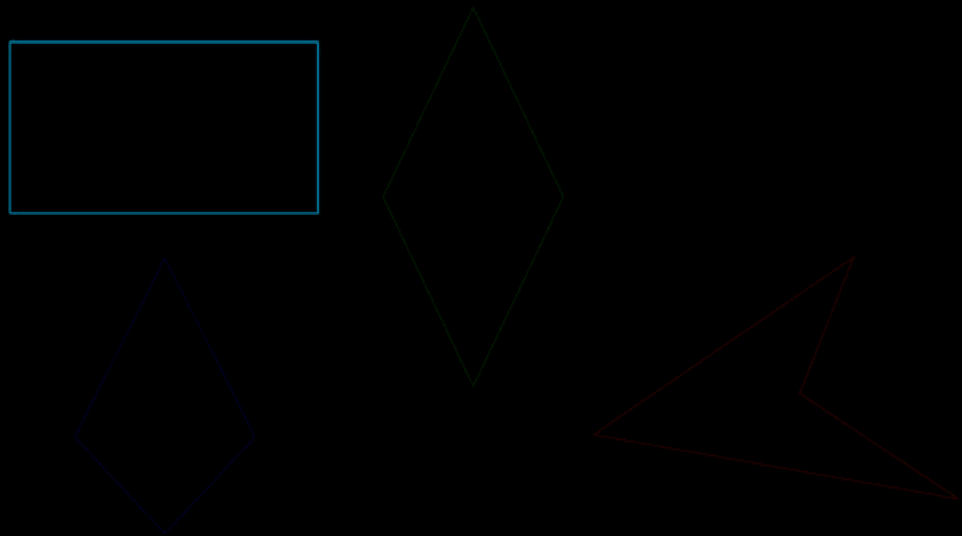
Secuencia didáctica

9

Aprendizaje esperado: Deducirás y usarás las relaciones entre los ángulos de polígonos en la construcción de polígonos regulares.
Contenido: Deducirás las relaciones entre los ángulos interiores de polígonos.

Diagonales y ángulos interiores

1. Reúnete con un compañero y tracen todas las diagonales de los cuadriláteros.



Glosario

diagonal.

a) ¿Todos los cuadriláteros tienen el mismo número de diagonales? ____________

En caso afirmativo, ¿cuántas diagonales tienen? ____________

b) ¿Todas las diagonales dividen a los cuadriláteros en dos partes iguales? ________

¿En cuáles casos sí y en cuáles no? ____________

____

____

c) ¿Todas las diagonales están contenidas en el interior del cuadrilátero? ________

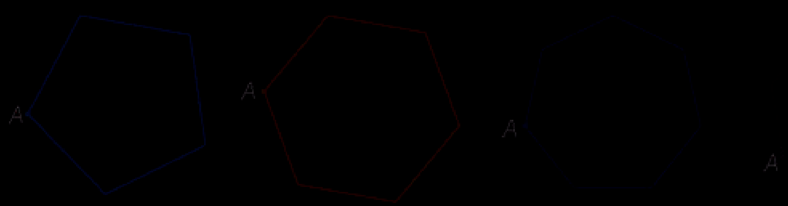
Si su respuesta es *no*, ¿en cuál o cuáles de los cuadriláteros no se cumple esta condición? ____________

d) Tracen en sus cuadernos otros cuadriláteros y comprueben sus respuestas anteriores.

Comparen sus respuestas con el resto del grupo, y si encuentran diferencias, discutan a qué se deben. Si detectan errores, corríjanlos.

2. Reúnete con un compañero y hagan lo que se pide.

a) En cada polígono, tracen todas las diagonales que parten del vértice A.



b) ¿Cuántas diagonales trazaron en el pentágono? ______

¿Y en el hexágono? ______ ¿Cuántas diagonales trazaron en el heptágono? ______ ¿Y en el octágono? ______

c) ¿Cambiaría el número de diagonales si los polígonos no fueran regulares? ______

d) Si en vez de trazar las diagonales que parten del vértice *A*, las hubieran trazado desde otro vértice, ¿cambiaría el número de diagonales? ______

¿Por qué? ______

e) Escriban los datos faltantes en la tabla.

Número de lados del polígono	Número de vértices del polígono	Número de diagonales que parten de un vértice
4		
5		
8		
10		

f) Si un polígono tiene *n* lados, ¿cuántos vértices tiene? ______

¿Cuántos de esos vértices no son consecutivos a un vértice dado? ______

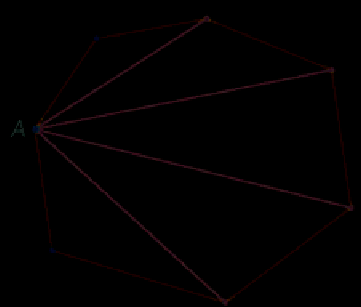
¿Cuántas diagonales se pueden trazar desde ese vértice? ______

Expliquen cómo obtuvieron su respuesta. ______

Discutan sus respuestas con el resto del grupo y lleguen a un acuerdo sobre cómo obtener el número de diagonales que parten de un vértice. Comparen su acuerdo con el siguiente texto.

En un polígono de n lados, el número de diagonales que parten de un vértice es $n - 3$.

Por ejemplo, si el polígono tiene siete lados, también tiene siete vértices, dos de los cuales son consecutivos al vértice desde el que parten las diagonales, y como no existe una diagonal de un vértice hacia él mismo ni a los vértices consecutivos, quedan $7 - 3 = 4$ vértices hacia los cuales trazar diagonales.



Glosario

polígono regular.

¿Vamos bien?

Resuelve lo siguiente con base en lo que has aprendido. Al terminar, compara tus procedimientos y tus resultados con los de tus compañeros.

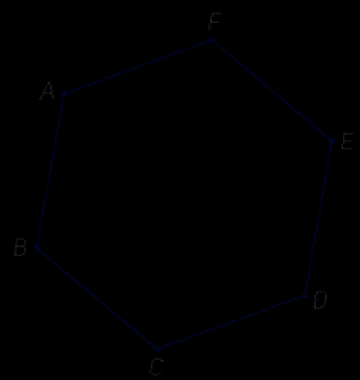
¿Cuántas diagonales parten de cada vértice en los siguientes polígonos?

a) Un polígono de 13 lados: ____________________

b) Un polígono de 51 lados: ____________________

c) Un polígono de 102 lados: ____________________

3. Reúnete con dos compañeros y hagan lo que se pide.



a) Escriban la lista de las diagonales que parten de cada vértice. Denótenlas con los nombres de los vértices que las determinan. Por ejemplo: *AC*, *BE*, *DA*, etcétera.

Las que parten de *A*: ____________________

Las que parten de *B*: ____________________

Las que parten de *C*: ____________________

Las que parten de *D*: ____________________

Las que parten de *E*: ____________________

Las que parten de *F*: ____________________

b) ¿Cuántas diagonales parten de cada vértice? ____________________

¿Cuántos vértices tiene el hexágono? ____________________ ¿Pueden saber cuántas diagonales escribieron en total sin contarlas una por una? __________

¿Cuántas fueron? ____________________

c) ¿Son distintas las diagonales *AC* y *CA*? ____________________ ¿Cuántas diagonales repetidas hay en sus listas? ____________________

d) ¿Cuántas diagonales tiene el hexágono? ____________________

e) ¿Cuál es el número total de diagonales de un heptágono? ____________________

¿Y de un polígono con 25 lados? ____________________

f) ¿Cómo calcularían el número total de diagonales de un polígono de n lados?

Discutan sus respuestas con el resto del grupo y lleguen a un acuerdo sobre cómo obtener el número total de diagonales de un polígono. Comparen su acuerdo con el siguiente texto.

El número total de diagonales de un polígono de n lados es:

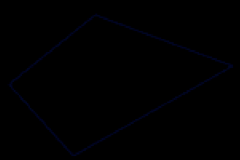
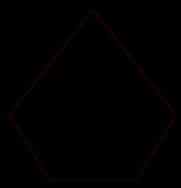
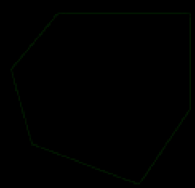
$$\frac{n(n-3)}{2}$$

Al multiplicar el número de vértices por el número de diagonales que parten de él, obtenemos $n(n-3)$, pero aquí estamos contando dos veces cada diagonal, pues, por ejemplo, la diagonal AB se cuenta entre las que parten de A y también entre las que parten de B, por lo que necesitamos dividir el producto anterior entre 2.

Así, el número total de diagonales de un polígono de 11 lados es:

$$\frac{11(11-3)}{2} = \frac{11 \times 8}{2} = \frac{88}{2} = 44$$

4. Elige un vértice en cada polígono y traza las diagonales que parten de él.

a) Escribe los datos faltantes en la tabla.

Número de lados del polígono	Número de diagonales que parten de un vértice	Número de triángulos en que queda dividido el polígono por las diagonales que parten de un vértice
4		
5		
6		

b) ¿Observas alguna relación entre los datos de la segunda y la tercera columnas? ¿Cuál es esa relación?

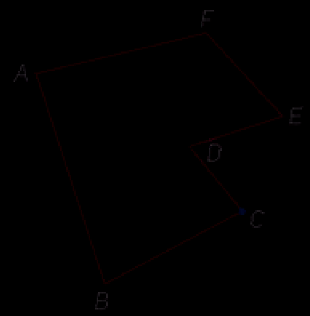
c) Con base en esa relación, ¿podrías deducir en cuántos triángulos queda dividido un polígono de ocho lados por las diagonales que parten de uno de sus vértices? __________ ¿Cuántos serían? ____________________

d) ¿En cuántos triángulos quedará dividido un polígono de 12 lados? __________
¿Por qué? ______________________________
____

e) ¿Sucederá esto en todos los polígonos? ____________________

Compara tus respuestas con las del resto del grupo, y si detectas errores, corrígelos.

5. Reúnete con un compañero y tracen las diagonales que parten del vértice C en el siguiente hexágono.



a) ¿Todas las diagonales quedaron dentro del hexágono? __________ ¿Los triángulos que forman las diagonales quedan dentro del hexágono? __________

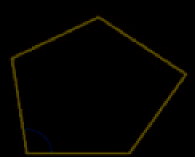
b) ¿Por qué piensan que sucede esto? ____________________

c) ¿Cuál es la diferencia entre este hexágono y los polígonos que analizaron en la actividad anterior? ____________________
____

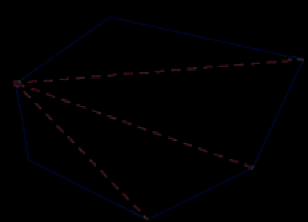
Discutan sus respuestas con el resto del grupo y lleguen a un acuerdo. Comparen su acuerdo con el siguiente texto.

Glosario

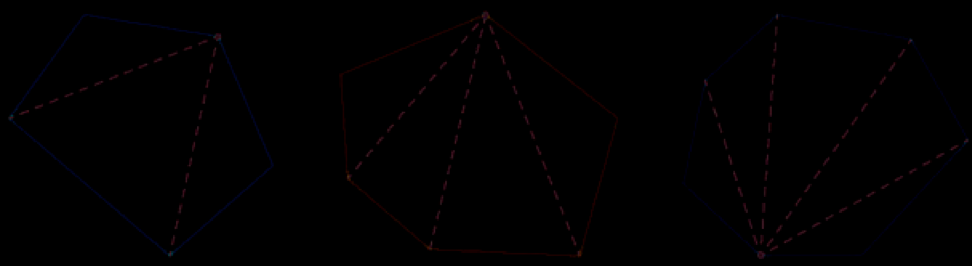
ángulo interior de un polígono



Un polígono es **convexo** si todos sus ángulos interiores miden menos de 180°.
Las diagonales que parten de un vértice en un polígono convexo de n lados lo dividen en $n - 2$ triángulos.



6. Reúnete con dos compañeros, analicen los polígonos y hagan lo que se pide.



a) ¿Cuánto mide la suma de los ángulos interiores de un triángulo? ____________

b) ¿Cuánto mide la suma de los ángulos interiores de tres triángulos? ____________

¿Cuánto medirá la suma de los ángulos interiores de un pentágono? ____________

c) Escriban los datos faltantes en la tabla.

Número de lados del polígono	Número de triángulos en que queda dividido por las diagonales que parten de un vértice	Suma de los ángulos interiores del polígono
4		
5		
6		
7		
8		
9		

d) ¿Cuánto medirá la suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados?

____

- Discutan sus respuestas con el resto del grupo y lleguen a un acuerdo. Comparen su acuerdo con el siguiente texto.

La suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados es $(n-2)180°$.

7. Reúnete con un compañero y respondan.

a) ¿Cuánto mide la suma de los ángulos interiores de un polígono de 12 lados? ____________ Si el polígono de 12 lados es regular, ¿cuánto medirá cada uno de sus 12 ángulos interiores? ____________

b) Si se sabe que la suma de los ángulos interiores de un polígono regular mide 1 080°, ¿cuántos lados tiene el polígono regular? ______, ¿cuál es la medida de sus ángulos interiores? ______

c) Si se sabe que cada ángulo interior de un polígono regular de n lados mide 140° ¿cuál expresión algebraica representa la suma de esos n ángulos interiores? ______ Como también se sabe que la suma de los ángulos interiores del polígono de n lados es $(n - 2)180°$, entonces $(n - 2)180° = n(140°)$. Desarrollen el producto del lado izquierdo de la igualdad y resten $n(140°)$ de ambos lados. ______

Ahora despejen n en la ecuación. ______

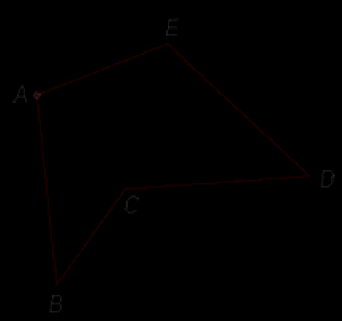
¿Cuántos lados tiene el polígono regular? ______

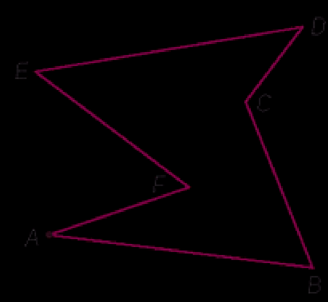
d) ¿Cuál ecuación deben resolver para determinar el número de lados de un polígono regular si se sabe que cada uno de sus ángulos interiores mide 156°? ______ ¿Cuál es la solución de la ecuación? ______

¿Cuántos lados tiene el polígono regular? ______

- Discutan sus respuestas con el resto del grupo y si detectan errores, corríjanlos.

8. Analiza los polígonos y haz lo que se pide.





a) ¿Alguno de los polígonos es convexo? ______

b) Traza las diagonales que parten del vértice A en el pentágono. ¿En cuántos triángulos quedó dividido? ______ ¿Cuál es la suma de sus ángulos interiores? ______ Compara tu resultado con el que se obtiene al multiplicar $(5 - 2)$ por 180°. Escribe tus observaciones. ______

______

c) Traza las diagonales CE, CF y BF en el hexágono. ¿En cuántos triángulos quedó dividido? ______ ¿Cuál es la suma de los ángulos interiores de este hexágono? ______ Compara tu resultado con el que se obtiene al multiplicar $(6 - 2)$ por 180°. Escribe tus observaciones. ______

d) Traza en tu cuaderno un octágono no convexo y traza diagonales para dividirlo en triángulos. ¿Cuántos triángulos obtuviste? ____________________

¿Cuál es la suma de los ángulos interiores de tu octágono? ____________

e) ¿Siempre será posible dividir un polígono de n lados en $n - 2$ triángulos? ______

¿Por qué? ____

____

____

Discute tus observaciones con el resto del grupo y lleguen a un acuerdo. Comparen su acuerdo con la siguiente información.

Todo polígono de n lados puede dividirse mediante diagonales en $n - 2$ triángulos. Dichas diagonales no necesariamente parten de un mismo vértice.

¿Qué aprendí?

Trabaja los siguientes ejercicios y problemas. Al terminar, revisa tus procedimientos y resultados, primero con ayuda de tus compañeros y luego con tu profesor.

1. Responde.

   a) ¿Cuál es la suma de los ángulos interiores de un polígono de 12 lados? ________

   b) ¿Cuál es la suma de los ángulos interiores de un polígono de 17 lados? ________

   c) ¿Cuántos lados tiene el polígono P si la suma de sus ángulos interiores es igual a 1620°? ______________________________

2. Resuelve.

   a) ¿Cuánto mide cada ángulo interior de un polígono regular de 7 lados? ________

   b) ¿Cuánto mide cada ángulo interior de un polígono regular de 10 lados? ________

   c) ¿Qué puedes decir de cada ángulo interior de cualquier polígono regular?

   ____

3. Si se sabe que los ángulos interiores de un polígono regular miden 135°, ¿cuántos lados tiene el polígono? ______________________________

Convivo en armonía

Marca con una ✓ la casilla que describe tu desempeño.

Deduzco las relaciones entre los ángulos interiores de polígonos.

Nivel de logro		
	A	Requiero ayuda para realizarlo.
	B	Lo hago, pero en ocasiones necesito ayuda.
	C	Lo hago de manera autónoma.

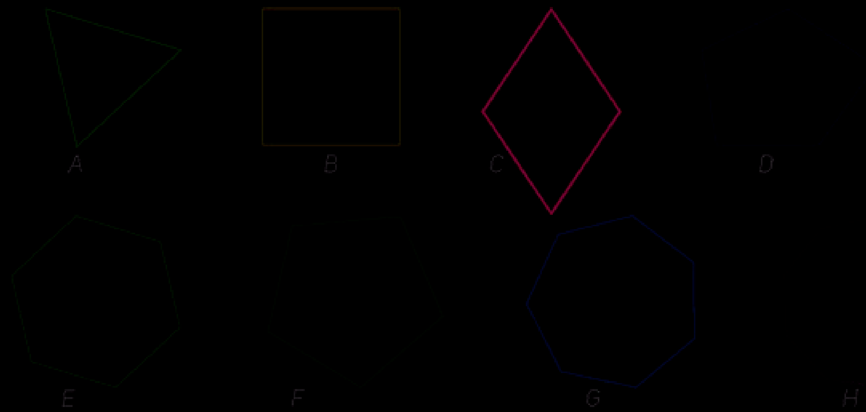
Secuencia didáctica

10

Aprendizaje esperado: Deducirás y usarás las relaciones entre los ángulos de polígonos en la construcción de polígonos regulares.
Contenido: Usarás las relaciones entre los ángulos de polígonos en la construcción de polígonos regulares.

Ángulos de polígonos

1. Reúnete con un compañero, analicen los polígonos y respondan. Midan los elementos que consideren necesarios.



a) ¿Cuáles de estos polígonos son regulares? ______

¿Por qué? ______

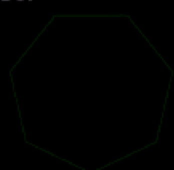
______

b) Escriban en la tabla los datos faltantes.

Nombre del polígono regular	Número de lados	Suma de los ángulos interiores
Triángulo equilátero		
Cuadrado		
Pentágono		
Hexágono		
Heptágono		
Nonágono		

Comparen sus repuestas con el resto del grupo, y si detectan errores, corríjanlos.

2. Analiza la figura y haz lo que se pide.



a) Traza en tu cuaderno un polígono como el de la imagen cuyos lados midan 3 cm.

b) ¿Qué elementos consideraste para trazar tu polígono? ______

______

c) ¿Cómo puedes verificar que el polígono que trazaste es regular? ____________

____

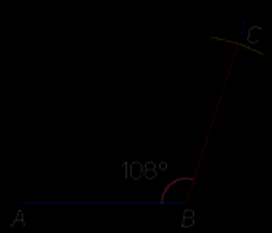
d) ¿Cuánto suman los ángulos interiores del polígono? ____________ Si todos los ángulos interiores de un polígono regular miden lo mismo, ¿cuánto mide cada ángulo interior del polígono? ____________

Compara tu polígono y tus respuestas con los de tus compañeros, y si detectas errores, corrígelos.

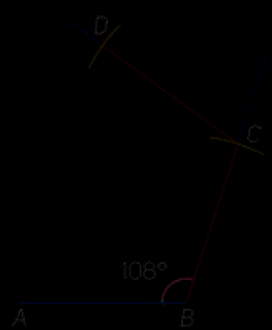
3. Realiza lo que se pide.

a) Traza en tu cuaderno un segmento *AB* de 5 cm de longitud. En el extremo *B* traza una recta que forme un ángulo de 108° con el segmento *AB*.

b) Copia la distancia *AB* sobre la recta; llama *C* al otro extremo del nuevo segmento.



c) Repite este procedimiento sobre el segmento *BC* para obtener el punto *D* y sobre el segmento *CD* para obtener el punto *E*.



d) Une *E* con *A*. ¿Es regular este pentágono? ____________ ¿Por qué? ____________

____

e) Ahora prolonga el lado *AB* del pentágono. ¿Cuál es la medida del ángulo formado por el lado *BC* con la prolongación del lado *AB*? ____________ ¿Cuánto suman la medida del ángulo interior con la medida del nuevo ángulo? ____________

f) ¿Podrías construir el pentágono usando la medida del ángulo que forma la prolongación de un lado con el lado adyacente? ____________ Escribe cómo lo harías.

____

____

Compara tus construcciones y tus respuestas con el resto del grupo.

Al ángulo que forma la prolongación de un lado del polígono con el lado adyacente se le llama **ángulo exterior**. El ángulo interior y el ángulo exterior son suplementarios, es decir, suman 180°.

Se puede construir cualquier polígono regular conociendo la longitud del lado y la medida del ángulo interior o la del ángulo exterior.

¿Vamos bien?

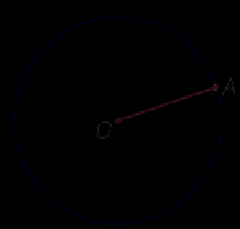
Resuelve lo siguiente con base en lo que has aprendido. Al terminar, compara tus procedimientos y tus resultados con los de tus compañeros.

I. Si el ángulo interior de un polígono regular mide 144°, ¿cuántos lados tiene el polígono regular? ____________________

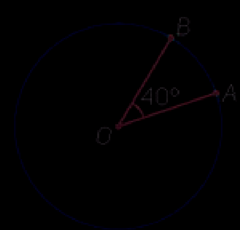
II. Traza en tu cuaderno un polígono regular con lados de 4 cm de longitud y cuyo ángulo interior mida 120°. ¿Cuántos lados tendrá tu polígono? ____________

4. Sigue las instrucciones y responde.

a) En tu cuaderno traza una circunferencia del radio que quieras y dibuja un radio OA.



b) Con ayuda de tu transportador traza otro radio OB que forme un ángulo de 40° con el radio OA.



c) Traza un tercer radio OC que forme un ángulo de 40° con el radio OB.

d) Si repites este procedimiento, ¿cuántos radios consideras que podrás construir? __________ ¿Por qué? ____________________

e) Una vez que hayas trazado todos los radios posibles, llama C, D, E, etcétera, a los extremos de los radios que están sobre la circunferencia. Une A con B, B con C, C con D, etcétera, hasta regresar al punto A.

f) ¿Son congruentes los triángulos OAB y OBC? ______________ ¿Por qué?
____

g) ¿Son congruentes todos los triángulos que se formaron? ________ ¿Por qué?
____
____

h) ¿Cuántos lados tiene el polígono que se formó? ______________________

i) ¿Qué número se obtiene al dividir 360° entre 40°? __________ ¿Qué relación hay entre este número y el número de lados del polígono? ______________

Glosario

triángulos congruentes.

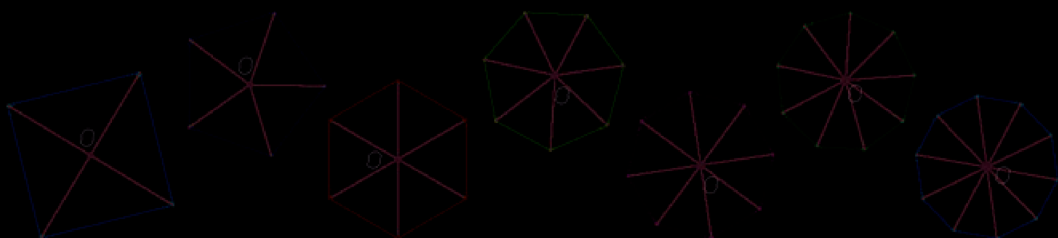
- Discute tus respuestas con el resto del grupo.

Ángulo central

Al ángulo cuyo vértice se encuentra en el centro de una circunferencia y cuyos lados son radios de la circunferencia se le llama **ángulo central**.

En un polígono, el **ángulo central** es aquel cuyo vértice está en el centro del polígono y cuyos lados son segmentos que unen un par de vértices consecutivos del polígono.

5. Reúnete con un compañero, analicen las figuras y hagan lo que se pide.



a) Escriban en la tabla los datos faltantes.

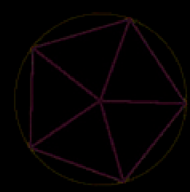
Número de lados del polígono	Medida del ángulo central
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

b) ¿Qué relación hay entre la medida del ángulo central de un polígono regular de n lados y el resultado de la división $\frac{360°}{n}$? ______

c) ¿Cuál es la medida del ángulo central de un polígono regular con 16 lados? ______ ¿Y de uno con 20 lados? ______

Comparen sus respuestas con las del resto del grupo, y si detectan un error, corríjanlo.

Se dice que un polígono está inscrito en una circunferencia si sus vértices están sobre dicha circunferencia.



6. Reúnete con dos compañeros y construyan en su cuaderno un polígono regular de ocho lados inscrito en una circunferencia.

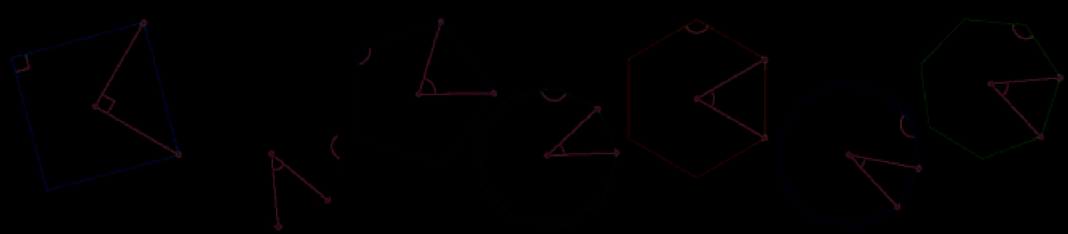
a) ¿Qué datos usaron para construir el polígono? ______

b) Escriban el procedimiento que usaron para construir el polígono. ______

Discutan su procedimiento con el resto del grupo.

Se puede construir un polígono regular de n lados, inscrito en una circunferencia, sabiendo que su ángulo central mide $\frac{360°}{n}$.

7. Reúnete con un compañero, analicen las figuras y hagan lo que se pide.



a) Escriban los datos faltantes en la tabla.

Número de lados del polígono regular	Medida del ángulo central	Medida del ángulo interior	Suma de las medidas del ángulo central y el ángulo interior
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			

b) ¿Cuánto mide la suma de las medidas del ángulo central y el ángulo interior de un polígono regular de 12 lados? ______

Discutan sus respuestas con las del resto del grupo y compárenlas con el siguiente texto.

En todo polígono regular, la suma de las medidas del ángulo central y el ángulo interior es 180°.

www.esant.mx/essema2-006

¿Vamos bien?

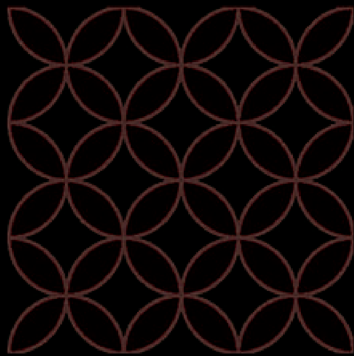
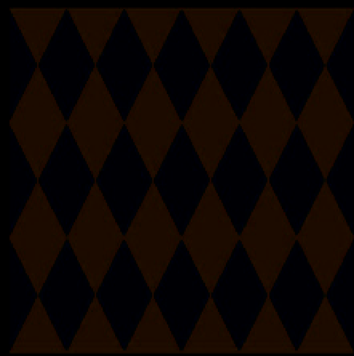
Resuelve lo siguiente con base en lo que has aprendido. Al terminar, compara tus procedimientos y tus resultados con los de tus compañeros.

I. ¿Cuántos lados tiene un polígono regular cuyo ángulo central mide 22.5°? ______

II. ¿Cuánto miden el ángulo central y el ángulo interior de un polígono regular de:

a) 13 lados? ______
b) 18 lados? ______
c) 24 lados? ______

8. Reúnete con un compañero, analicen los mosaicos y hagan lo que se pide.

Cada uno de estos mosaicos se construyó a partir de un cuadrado. Identifiquen uno de los cuadrados que se repitió en cada caso y dibújenlo sobre el mosaico.

- Comparen su respuesta con las del resto del grupo. Diseñen un mosaico similar a los anteriores y adornen su salón con todos los diseños que elaboraron en el grupo.

Cuando se puede armar un mosaico con copias de un polígono, sin dejar huecos ni encimar las piezas, decimos que el polígono **cubre el plano**.

9. Reúnete con dos compañeros y hagan lo que se pide.

Sobre cartón o papel resistente, construyan 10 copias de cada una de las siguientes figuras: un triángulo equilátero, un cuadrado, un pentágono regular, un hexágono regular, un heptágono regular y un octágono regular (una medida recomendable para la longitud de los lados es 5 cm). Recorten las copias de los polígonos y, usando un solo tipo de polígono, unan las piezas como un rompecabezas, es decir, sin que se encimen y sin que dejen huecos. Copien en una hoja de papel los rompecabezas que pudieron formar con los distintos polígonos.

a) ¿Cuáles de los polígonos no cubren el plano? ______________________

¿Cuál es la medida del ángulo interior de esos polígonos? ______________

b) ¿Cuál es la medida del ángulo interior de los polígonos que sí cubren el plano?

____

c) En los polígonos que sí cubren el plano, ¿cuántas copias del polígono se juntan en cada vértice? ______________________

¿Cuál es la suma de los ángulos interiores alrededor de cada vértice? ________

- Discutan sus respuestas con el resto del grupo y lleguen a un acuerdo sobre las características que debe tener un polígono regular para cubrir el plano. Comparen su acuerdo con la información de la siguiente página.

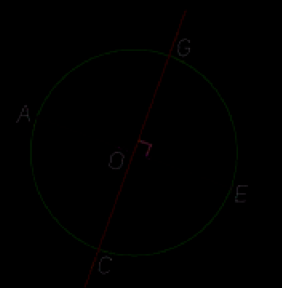
Si al dividir 360° entre la medida del ángulo interior de un polígono regular el resultado es un número entero, el polígono regular cubre el plano. Por ejemplo si el ángulo interior de un polígono mide 120°, entonces el polígono cubre el plano, pues $\frac{360°}{120°} = 3$.

Trabaja los siguientes ejercicios y problemas. Al terminar, revisa tus procedimientos y resultados, primero con ayuda de tus compañeros y luego con tu profesor.

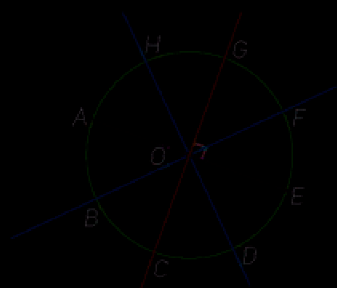
1. En tu cuaderno, traza un heptágono regular con lado de longitud 4 cm.
   a) ¿Cuál es la medida del ángulo interior del heptágono? ____________
   b) ¿Cuál es la medida del ángulo exterior? ____________

2. Construye un hexágono regular inscrito en una circunferencia de 5 cm de radio. ¿Cuánto mide el ángulo central del hexágono? ____________

3. Construye una circunferencia del radio que quieras y traza un diámetro *AE*. Llama *O* al centro de la circunferencia. Traza una perpendicular al diámetro *AE* que pase por *O*, llama *C* y *G* a los puntos donde la perpendicular corta a la circunferencia.



   a) ¿Qué polígono obtienes al unir *A* con *C*, *C* con *E*, *E* con *G* y *G* con *A*? ____________
   b) Con ayuda de tu transportador divide a la mitad los ángulos centrales, llama *B*, *D*, *F* y *H* a los puntos donde los segmentos cortan a la circunferencia.
   c) Une *A* con *B*, *B* con *C*, etcétera, hasta regresar a *A*. ¿Cuántos lados tiene el polígono? ____________ ¿Es regular? ________ ¿Por qué? ____________



   d) ¿Qué procedimiento seguirías para construir un polígono regular de 16 lados?

____

____

____

Glosario

diámetro.

Marca con una ✓ la casilla que describe tu desempeño.

Uso las relaciones entre los ángulos de polígonos en la construcción de polígonos regulares.

Nivel de logro		
	A	Requiero ayuda para realizarlo.
		Lo hago, pero en ocasiones necesito ayuda.
	C	Lo hago de manera autónoma.

Taller de tecnología

Polígonos regulares

Abre una hoja de GeoGebra. Coloca el cursor en “Vista Gráfica”, da clic derecho y desactiva las opciones “Ejes” y “Cuadrícula” (imagen 1). Es recomendable que, antes de iniciar esta actividad, te familiarices con las funciones del programa. Practica trazando rectas, segmentos, paralelas, perpendiculares, puntos de intersección, etcétera.

Imagen 1

1. Construye un polígono regular de seis lados, dadas la longitud del lado y la medida del ángulo interior, siguiendo estos pasos.

   a) Selecciona la herramienta “Segmento de longitud dada” en el tercer icono de izquierda a derecha. Da clic en algún punto de la pantalla para seleccionar un extremo del segmento. Aparecerá una ventana como se muestra en la imagen 2.

   Teclea el número que quieras y presiona “OK”. En la pantalla se mostrará el segmento de la longitud que elegiste. Puedes ocultar las etiquetas del segmento colocando el cursor sobre él y sobre sus extremos presionando el botón derecho del ratón y seleccionando la opción “Etiqueta visible”.

Imagen 2

Imagen 3

b) Traza uno de los lados adyacentes del polígono. Para ello, selecciona en el noveno icono. Selecciona el segmento y el extremo de este sobre el cual lo rotarás, aparecerá una ventana como la que se muestra en la imagen de la derecha.

- ¿Cuánto mide el ángulo interior de un polígono regular de seis lados? ____________________
- ¿Qué número deberás escribir en la ventana? ________________

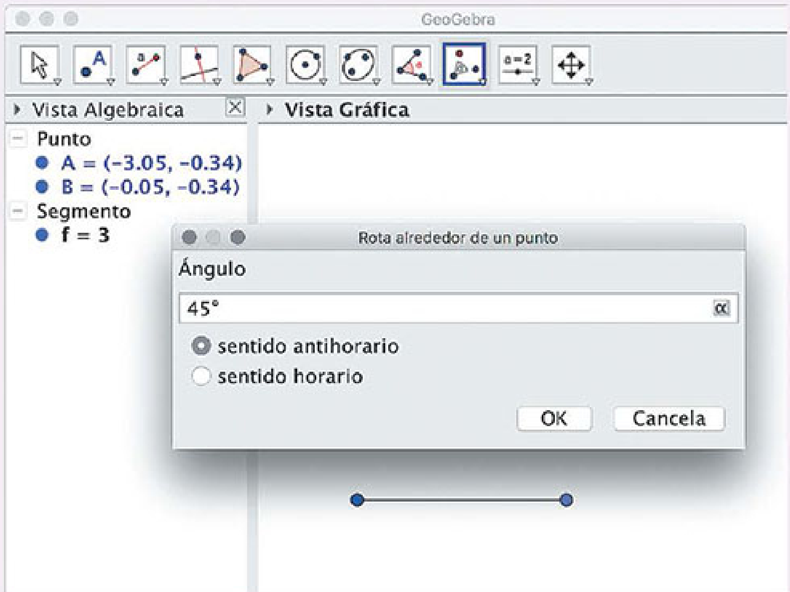


Imagen 4

Ahora deberás elegir entre las opciones "sentido antihorario" y "sentido horario". Si eliges sentido antihorario, la rotación se hará en el sentido inverso al de las manecillas del reloj y si eliges sentido horario, la rotación se hará en el sentido de las manecillas del reloj.

- ¿Qué sentido consideras que debes elegir? ______________________________
- ¿Esta decisión depende del extremo del segmento que elegiste? ____________

____

Si no elegiste la opción correcta, puedes deshacer la última acción que realizaste usando el icono que aparece en la esquina superior derecha. Si elegiste la opción correcta, tu pantalla se deberá ver de una de estas dos formas:

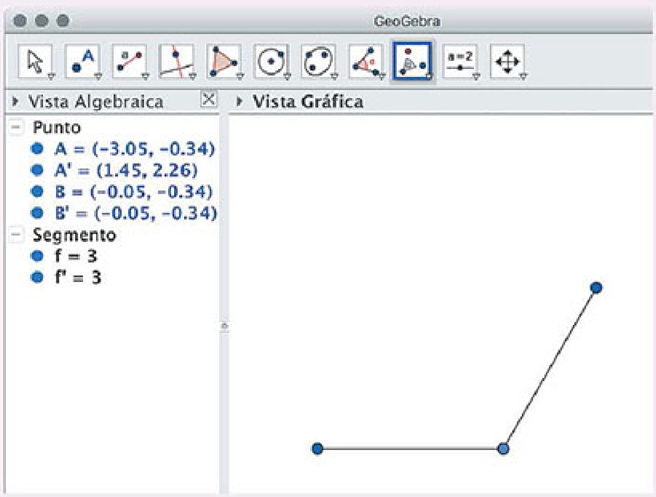


Imagen 5

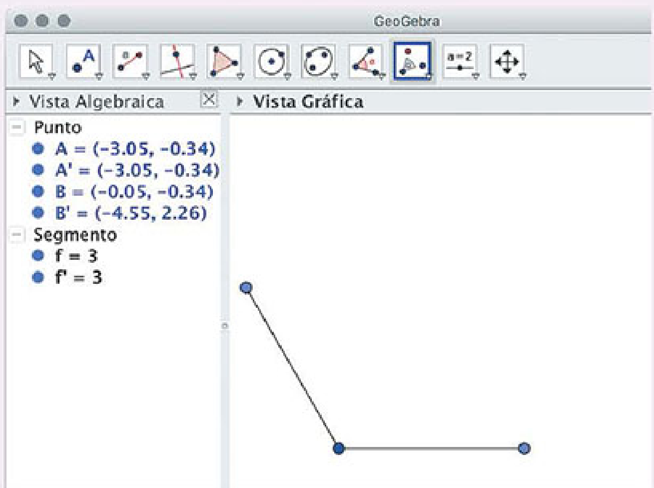


Imagen 6

c) Construye los lados faltantes para completar el hexágono.

2. Construye un polígono regular de nueve lados inscrito en una circunferencia siguiendo estos pasos.

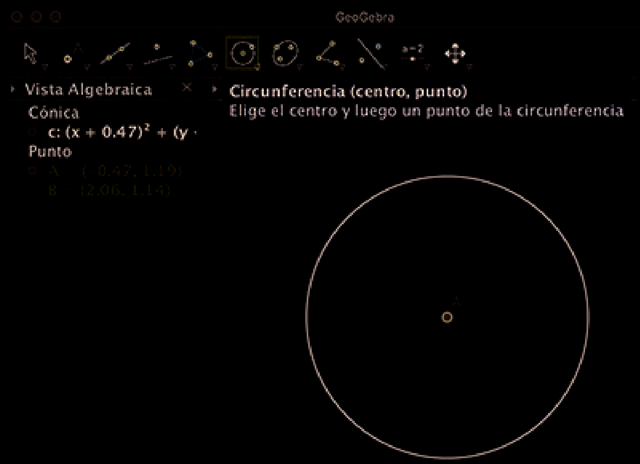


Imagen 7

a) Abre una nueva hoja de GeoGebra, oculta los ejes y la cuadrícula. En el sexto icono elige la herramienta "Circunferencia (centro, punto)", presiona el ratón para señalar el centro de la circunferencia y mueve el ratón hasta otro punto en la pantalla (que definirá la longitud del radio). Vuelve a presionar el ratón. Oculta el punto *B* y la etiqueta de la circunferencia.

Renombra al punto *A* colocándote sobre él y presionando el botón derecho del ratón. Llama *O* al centro de la circunferencia (imágenes 8 y 9).

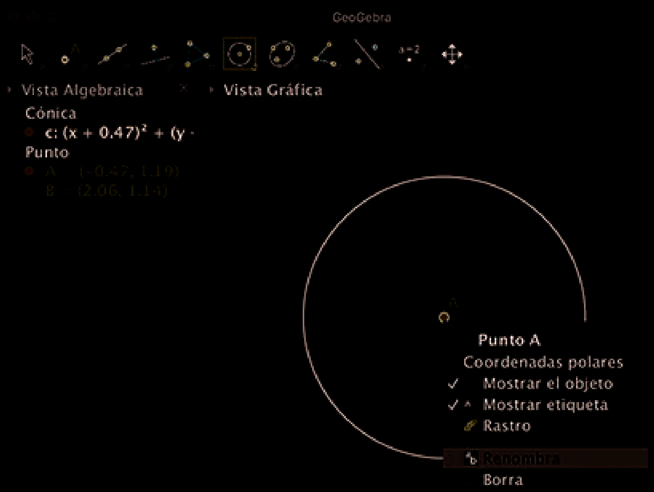


Imagen 8

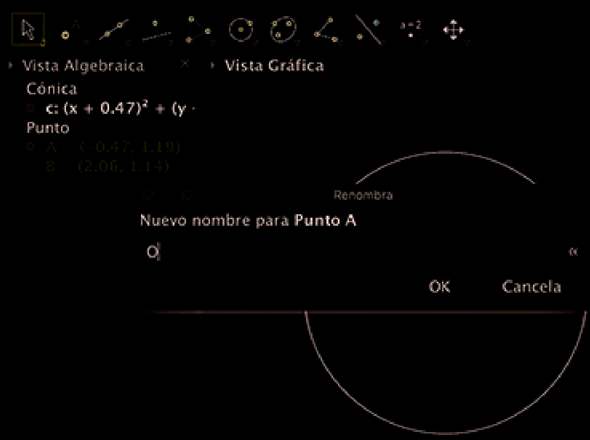


Imagen 9

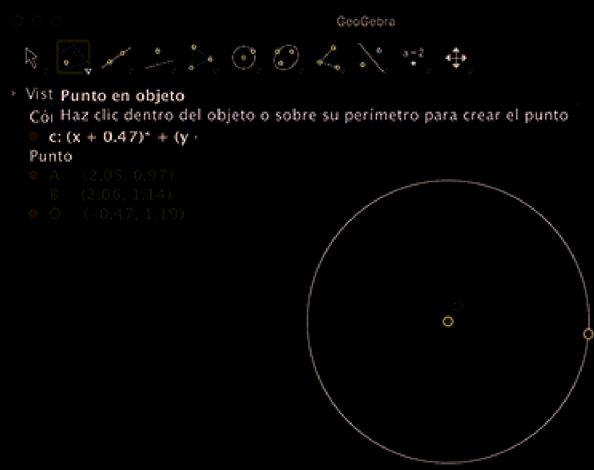


Imagen 10

b) En el segundo icono selecciona la herramienta "Punto en objeto" y marca un punto sobre la circunferencia como en la imagen 10.

c) Con la herramienta "Segmento" del tercer icono, traza el segmento $\overline{OA}$.

d) Selecciona el icono y rota el segmento $\overline{OA}$ alrededor del centro de la circunferencia con un ángulo de amplitud igual al ángulo central del polígono regular de nueve lados.

- ¿Cuánto mide este ángulo central? ______________________

Renombra a los extremos de los radios presionando el botón derecho del ratón y eligiendo la opción "Renombra".

e) Repite esta operación hasta tener los nueve radios como en la imagen 12.

f) Elige la herramienta "Polígono" del cuarto icono y une A con B, B con C, etcétera, hasta regresar al punto A (imagen 13).

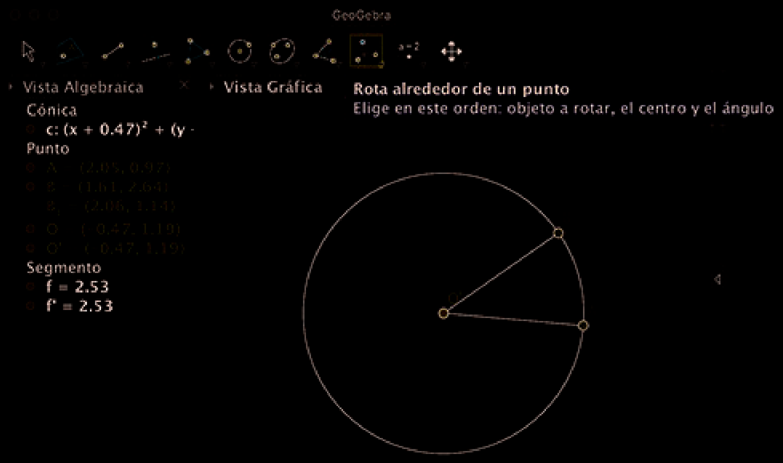


Imagen 11

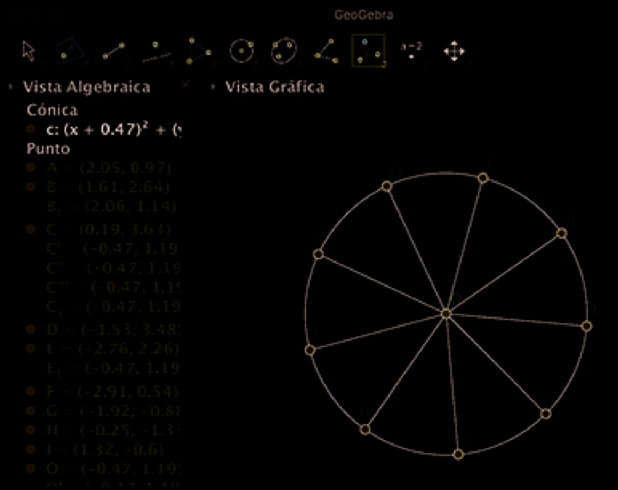


Imagen 12

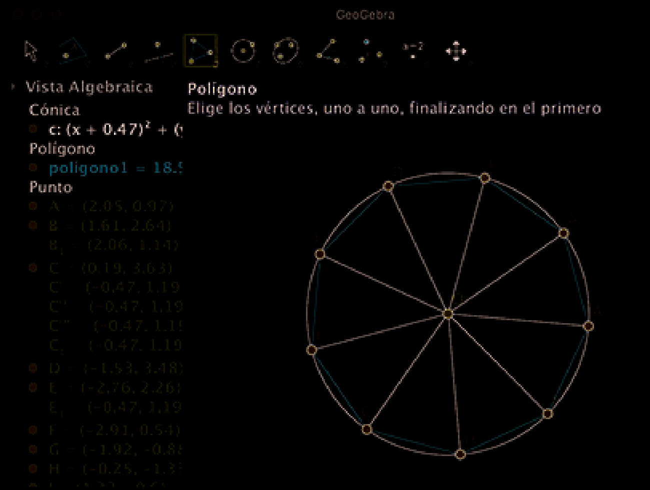


Imagen 13

- ¿Cómo puedes garantizar que el polígono que construiste es regular? ______________________

____

____

3. Responde y haz lo que se indica.

a) ¿Cuánto mide el ángulo exterior de un pentágono regular? ______________________

b) Usa esta información para construir un pentágono regular con lados de 5 cm de longitud.

Secuencia didáctica

11

Aprendizaje esperado: Resolverás problemas de proporcionalidad directa e inversa y de reparto proporcional.
Contenido: Resolverás problemas de proporcionalidad directa e inversa.

La inversa

1. Lee la información y responde.

Para hacer una excursión escolar, se contrata el servicio de un autobús por el que se deben pagar $1600.

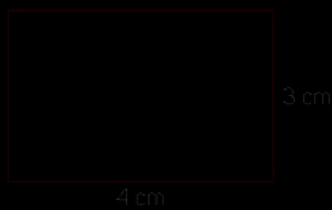
a) Se han anotado 28 alumnos para ir a la excursión. ¿Cuánto le toca pagar a cada alumno por el transporte? ______

b) Si asisten más alumnos, ¿el monto que cada uno debe pagar por transporte aumenta o disminuye? ______

c) ¿Cuánto le tocaría pagar a cada uno si fueran 32 alumnos? ______
¿Y si fueran 40? ______

Compara tus respuestas con las de un compañero y comenten cómo encontraron las soluciones.

2. Reúnete con un compañero, analicen la figura y hagan lo que se indica.



a) ¿Cuánto mide el área del rectángulo? ______

b) Tracen otros dos rectángulos con área igual a 12 cm^2.

c) ¿Qué procedimiento siguieron para determinar las dimensiones de sus rectángulos? ______

d) ¿Qué altura tendrá un rectángulo de área 12 cm^2 cuya base mide 8 cm? ______
¿Qué operación hicieron para encontrar la altura? ______

Comparen sus respuestas y procedimientos con el resto del grupo.

3. Reúnete con un compañero, lean la información y hagan lo que se pide.

Ricardo quiere saber cuántos galones de pintura debe comprar para pintar 28 muros de 102 m^2 y a cuántos pintores debe contratar, considerando que todos trabajan al mismo ritmo. Sabe que con cuatro galones se pueden pintar 34 m^2 de pared, aplicando dos manos de pintura, y que un solo pintor tardaría 30 días en hacer el trabajo.

a) Escriban los datos faltantes en la tabla.

Galones de pintura	1	2	4	5	7	10	15
Metros cuadrados			34				

Glosario

magnitudes directamente proporcionales.

b) ¿El número de galones y la cantidad de metros cuadrados son magnitudes directamente proporcionales? __________ ¿Por qué? ____________________

____

c) En caso de que sean proporcionales, ¿cuál es la constante de proporcionalidad?

____

d) ¿Cuántos galones de pintura se necesitan para pintar 102 m^2 de pared? __________
Escriban el procedimiento que siguieron para encontrar la respuesta. __________

____

e) Completen la tabla suponiendo que todos los pintores trabajan al mismo ritmo.

Número de pintores	1	2	3	4	5	6	7
Días	30						

f) Escriban las diferencias que encuentran entre la forma de variación que se muestra en esta tabla y la variación directamente proporcional. __________

____

____

g) ¿Qué operación hicieron para determinar cuántos días tardan dos trabajadores?

____

h) Multipliquen las dos cantidades de cada columna, es decir, el número de pintores por el correspondiente número de días. Escriban los resultados que obtuvieron.

____

i) ¿Cuántos pintores que trabajan al mismo ritmo se requieren para hacer el trabajo en tres días? __________ ¿Y en dos días? __________

Discutan los resultados que obtuvieron con sus compañeros y compárenlos con la información de la siguiente página.

Dos magnitudes son **inversamente proporcionales** si al multiplicar una de ellas por un número, la otra se divide entre el mismo número, y viceversa, si al dividir una de ellas entre un número, la otra queda multiplicada por el mismo número. Por ejemplo:

Magnitud 1	4	8	12	24
Magnitud 2	6	3	2	1

Si dos magnitudes son inversamente proporcionales, y a un valor x de la primera magnitud le corresponde un valor y de la segunda magnitud, entonces el producto xy es una constante que se conoce como **constante de proporcionalidad inversa**. Esto se puede escribir así:

$$xy = k, \text{ o bien } y = \frac{k}{x} \text{ o } y = k\,\frac{1}{x}$$

¿Vamos bien?

Resuelve lo siguiente con base en lo que has aprendido. Al terminar, compara tus procedimientos y tus resultados con los de tus compañeros.

Una toma de agua con un caudal de 18 litros por minuto tarda ocho horas en llenar una cisterna.

a) ¿El caudal de agua y el tiempo de llenado de la cisterna varían de forma inversamente proporcional? ________ ¿Por qué? ________________

____

____

b) Si en otra ocasión la cisterna se llenó en 16 horas, ¿de cuánto era el caudal?

____

c) Si el caudal fuera de 36 litros por minuto, ¿cuánto tiempo tardaría en llenarse la cisterna? ____________________

4. Reúnete con un compañero y respondan.

   a) Cuatro máquinas iguales trabajan 30 horas y producen 1000 piezas. ¿Cuánto tiempo tardará el doble de máquinas en producir las 1000 piezas? ________ Escriban la operación que realizaron. ________________

   b) ¿Cuánto tiempo tardará la mitad de las cuatro máquinas en producir las 1000 piezas? ________ Escriban la operación que realizaron. ________

c) ¿El número de máquinas y el tiempo que tardan en producir las piezas son magnitudes inversamente proporcionales? _________ ¿Cuál es la constante de proporcionalidad? ______

d) Verifiquen su respuesta multiplicando el número de máquinas por el tiempo que tardan en producir las 1000 piezas. ______

e) ¿Cuánto tiempo tardarán 12 máquinas en producir las 1000 piezas? ______

f) Resuelvan la ecuación $12t = 120$. ______ ¿Obtuvieron el mismo resultado que en el inciso *e*? ______

g) ¿Cuánto tardarán 10 máquinas en producir las 1000 piezas? ______

h) ¿Cuál es la solución de la ecuación $10t = 120$? ______

¿Coincide el resultado que obtuvieron en el inciso *g* con la solución de esta ecuación? _________ ¿Por qué piensan que sucede esto? ______

______

i) ¿Qué ecuación deben resolver para determinar el tiempo que tardarán 125 máquinas en producir las 1000 piezas? ______

Discutan sus respuestas y procedimientos con el resto del grupo.

5. Resuelve los problemas. Escribe el procedimiento que usaste para obtener cada respuesta.

a) Un albañil tarda cinco días en construir un muro de 90 m^2. ¿Cuánto tardarán tres albañiles en construir el mismo muro trabajando al mismo ritmo que el primero?

______

Procedimiento: ______

______

______

b) Seis personas levantan una cosecha en seis días. ¿En cuánto tiempo levantarán la cosecha ocho personas trabajando al mismo ritmo? ______

Procedimiento: ______

______

______

c) Dos secretarias juntas pueden hacer un trabajo en nueve horas. ¿En cuánto tiempo harían el mismo trabajo tres secretarias trabajando al mismo ritmo? ______

Procedimiento: ______

______

______

Compara tus respuestas y procedimientos con el resto del grupo, y si detectas errores, corrígelos.

Aplico

¿Qué aprendí?

Trabaja los siguientes ejercicios y problemas. Al terminar, revisa tus procedimientos y resultados, primero con ayuda de tus compañeros y luego con tu profesor.

1. En las tablas se muestra la relación entre parejas de valores de dos magnitudes. Escribe en cada caso si el tipo de variación es inversamente proporcional o no. Justifica tu respuesta.

a)

Magnitud 1	3	5	6	8	12	15
Magnitud 2	4.5	7.5	9	12	18	22.5

b)

Magnitud 1	-4	-2	2	3	4	6
Magnitud 2	3	6	-6	-4	-3	-2

c)

Magnitud 1	-2	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
Magnitud 2	$-\frac{1}{16}$	8	4	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

2. La variación de las magnitudes 1 y 2 es inversamente proporcional. Escribe los datos faltantes en las tablas y determina cuál es la constante de proporcionalidad inversa en cada caso.

a) Constante de proporcionalidad inversa:

Magnitud 1	5		2	6		45
Magnitud 2		15		-5	-2	

b) Constante de proporcionalidad inversa:

Magnitud 1		-1	3	5	10	15
Magnitud 2	$-\frac{5}{2}$		$\frac{5}{3}$			

c) Constante de proporcionalidad inversa: ______

Magnitud 1	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$		4	6	8
Magnitud 2			$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$		

3. Lee los problemas y al final de cada uno escribe si las magnitudes involucradas son directamente proporcionales, inversamente proporcionales o ninguna de las dos.

Problema 1. Javier da 28 pasos de 75 cm para recorrer una distancia. ¿Cuántos pasos deberá dar Amanda para recorrer la misma distancia si la longitud de sus pasos es de 60 cm?

______

Problema 2. Un vehículo viaja a rapidez promedio de 110 km por hora. ¿Qué distancia recorre después de una hora y media de viaje?

______

Problema 3. Graciela tomó un taxi en la Ciudad de México para hacer un recorrido de 17.5 km. Si el taxi cobra $1.07 por cada 250 metros recorridos y el banderazo (cobro por abordar el taxi) es de $8.47, ¿cuánto pagó Graciela por su recorrido?

______

4. Escribe todas las medidas posibles de la altura y la base de un triángulo si se sabe que estas magnitudes son números enteros y que el triángulo tiene un área de 24 cm^2.

______

Argumenta por qué se trata de magnitudes inversamente proporcionales.

______

______

5. Resuelve.

a) Una cisterna tarda dos horas en llenarse con una llave que vierte 15 litros de agua por minuto. ¿Cuánto tiempo tardará en llenarse con tres llaves que vierten la misma cantidad de litros por minuto? ______

b) Un autobús viaja a rapidez promedio de 90 km por hora y tarda 10 horas en llegar de una ciudad a otra. Si en otra ocasión realiza el viaje en ocho horas, ¿a qué rapidez promedio realizó este viaje? ______

Marca con una ✓ la casilla que describe tu desempeño.

Contenido		
Resuelvo problemas de proporcionalidad directa e inversa.		
Nivel de logro	A	Requiero ayuda para realizarlo.
		Lo hago, pero en ocasiones necesito ayuda.
	C	Lo hago de manera autónoma.

Secuencia didáctica

12

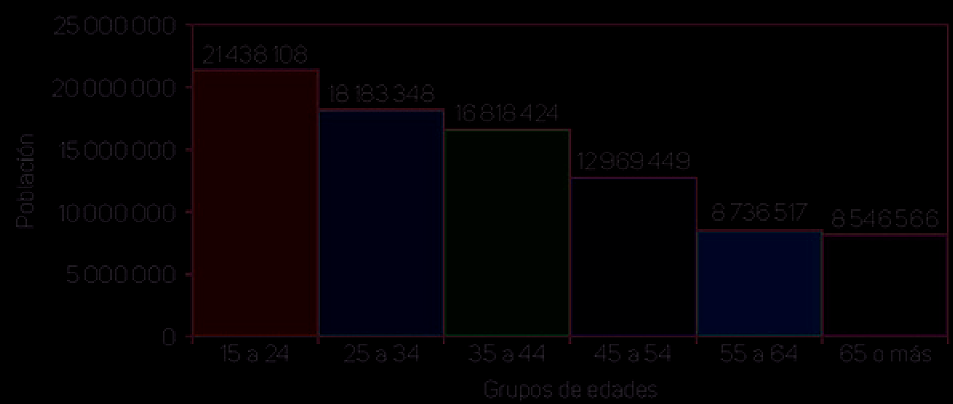
Aprendizaje esperado: Recolectarás, registrarás y leerás datos en histogramas, polígonos de frecuencia y gráficas de línea.
Contenido: Recolectarás, registrarás y leerás datos en histogramas y polígonos de frecuencia.

Se lee entre barras y entre líneas

1. Analiza el texto y la gráfica, después responde.

En nuestro país, la educación básica (preescolar, primaria y secundaria) es obligatoria. Por ese motivo, se considera que si alguien llega a los 15 años de edad y no ha concluido la secundaria está en rezago educativo. La siguiente gráfica muestra datos de todo el país sobre esta situación.

Población de 15 años o más en rezago educativo, 2015



Fuente: www.inee.gob.mx/transparencia/pdf/rez_[illegible] (consulta: 25 de enero de 2017). Elaborado con datos de la Encuesta Intercensal 2015, Inegi. Estadísticas del Sistema Educativo Nacional ciclo 2014-2015, SEP. Citado por el INEE.

a) ¿De qué año son los datos que se muestran en la gráfica? ____________

b) ¿En qué grupo de edades se concentra el mayor número de personas en situación de rezago educativo? ____________ ¿Y el menor número? ____________

c) ¿Qué ocurre con el número de personas en rezago educativo conforme aumenta la edad? ____________

d) ¿En qué grupos de edades el número de personas en rezago educativo es mayor a 15 millones? ____________

e) ¿Cuántas personas de 45 a 54 años están en situación de rezago educativo? ____________

f) ¿En qué grupo de edades se considera a una persona de 34 años con 11 meses y 30 días? ____________

g) ¿Qué puedes concluir respecto a la edad de las personas y el rezago educativo? ____________

Compara tu trabajo con el de otro estudiante. Si hay desacuerdos, analícenlos y lleguen a un consenso.

2. Reúnete con un compañero, revisen la información y lleven a cabo lo que se indica.

En los Juegos Olímpicos de Río de Janeiro de 2016, en la prueba eliminatoria de natación de 100 m libre varonil, nadadores de 40 países registraron tiempos inferiores a 50 segundos. En la tabla se muestran los tiempos.

47.90	47.91	48.01	48.12	48.22	48.27	48.35	48.39	48.46	48.47
48.49	48.51	48.53	48.57	48.57	48.58	48.61	48.62	48.65	48.68
48.75	48.78	48.80	48.86	48.87	48.92	48.94	49.05	49.14	49.16
49.20	49.24	49.24	49.25	49.37	49.38	49.40	49.57	49.62	49.82

Fuente: [illegible] (consulta: 10 de enero de 2018). Datos tomados de la página oficial de los Juegos Olímpicos.

a) Analicen la información de la siguiente tabla.

Tabla de frecuencias con datos agrupados

Intervalos de tiempo (segundos)	Tiempos de los nadadores en el intervalo (segundos)	Frecuencia absoluta de los tiempos en el intervalo
[47.9, 48.2)	47.9, 47.91, 48.01, 48.12	4
[48.2, 48.5)	48.22, 48.27, 48.35, 48.39, 48.46, 48.47, 48.49	7
[48.5, 48.8)		
, 50.0)		
	Suma	40

Glosario

frecuencia absoluta.

b) Observen que cada intervalo de tiempo tiene un límite inferior y un límite superior. Escriban la diferencia entre estos límites para los primeros tres intervalos.

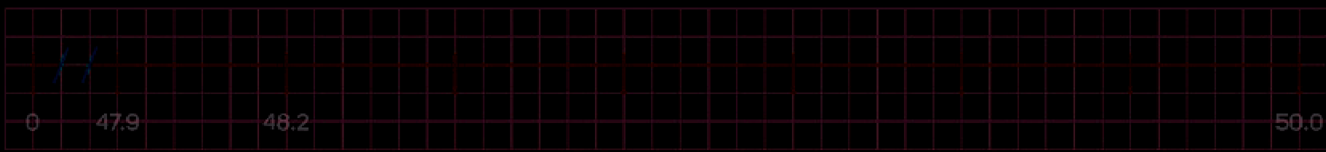
Intervalo	[47.9, 48.2)	[48.2, 48.5)	[48.5, 48.8)
Límite inferior	47.9		
Límite superior	48.2		
Diferencia entre los dos límites	$48.2 - 47.9 = 0.3$		

c) Usen la información del inciso *b* para determinar los intervalos de tiempo de manera que los registros de los nadadores queden en alguno de ellos. Después completen la tabla de frecuencias.

d) ¿El tiempo de un nadador puede quedar registrado en dos intervalos diferentes? ______ ¿Por qué? ______

e) Si un nadador hubiera hecho un tiempo de 48.999 s, ¿en qué intervalo lo hubieran registrado? ______ ¿Y a otro nadador con tiempo de 49.009 s? ______

f) Ubiquen en la recta los puntos medios de cada intervalo y escriban el número que corresponde a cada uno.



g) ¿Cuántos nadadores registraron un tiempo menor a 48.5 s? ______ ¿Cuántos registraron un tiempo mayor o igual a 48.8 s? ______

h) A las semifinales pasaron solo los nadadores con tiempos menores a 48.6 s. ¿Cuántos nadadores pasaron a las semifinales? ______

i) Si elaboraran una tabla de frecuencias sin agrupar los tiempos en intervalos, ¿cuántas filas tendría la tabla? ______

j) Si quieren tener una visión global de los tiempos de los nadadores en la competencia, ¿qué resulta más práctico: agrupar los tiempos o no? ______

- Muestren su trabajo a otra pareja de compañeros y ustedes revisen el de ellos. Si hay desacuerdos, analicen la siguiente información y, después, discutan los desacuerdos y lleguen a un consenso.

Un **intervalo de números** incluye todos los números que van desde un valor inicial *a* hasta un valor final *b*. Se representa de distintas formas según incluya o no a los extremos de los intervalos.

- $[a, b]$, si incluye a los dos números *a* y *b*
- $(a, b]$, si no incluye al número *a*
- $[a, b)$, si no incluye a *b*
- (a, b), si no incluye a *a* ni a *b*

En una tabla de frecuencias con los datos agrupados en intervalos $[a, b)$:

- A cada intervalo se le llama **clase de intervalo** o simplemente **clase**.
- Dos clases de intervalos distintos no pueden tener un mismo dato.
- Todos los datos deben quedar cubiertos en las clases de intervalos.
- La **amplitud del intervalo** es su longitud: $b - a$.
- La **marca de clase** es el punto medio de cada intervalo. Dicho de otra manera, es el promedio del límite inferior y el límite superior de cada intervalo: $(a + b) \div 2$.

3. Hagan esta actividad en equipos.

Midan su ritmo cardiaco. Coloquen las yemas de los dedos de una mano en el cuello y sientan los latidos; cuéntenlos (mentalmente) durante 10 segundos, después multipliquen por 6 el número de latidos y anoten el resultado. El profesor puede indicar el momento en que empiezan y terminan de contar.

a) Registren las pulsaciones por minuto de todos sus compañeros y construyan una tabla de frecuencias con cinco clases de intervalos.

Clases de intervalos	Marca de clase	Frecuencia de pulsaciones

b) ¿Qué hicieron para determinar el límite inferior y el límite superior de cada intervalo? ______________________________

____

c) ¿Cuál es la amplitud de los intervalos? ______________________________

d) Calculen el rango de todos los datos (recuerden que es la diferencia entre el dato mayor y el dato menor). ______________________________

e) ¿El rango es múltiplo de 5? ________ Si su respuesta fue negativa, ¿qué número hay que sumar al rango para que la suma sea múltiplo de 5? ______________

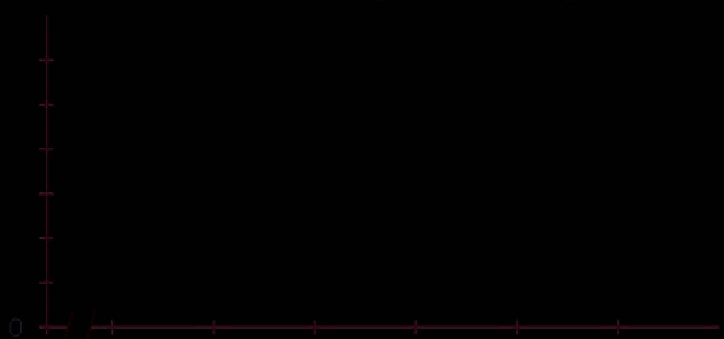
Hagan la suma: ______________ Dividan el resultado entre 5: ______________

¿Se relaciona este número con su respuesta del inciso *c*? ______________

f) Si el número de clases de intervalos fuera 6, ¿cuál tendría que ser la amplitud del intervalo? ______________ Expliquen por qué. ______________________________

____

g) En el siguiente espacio, construyan un histograma, es decir, una gráfica de la siguiente manera: en el eje horizontal coloquen los intervalos de pulsaciones y, con base en esos intervalos, tracen un rectángulo con altura igual a la frecuencia del intervalo.



h) ¿Cómo quedaron los rectángulos del histograma: juntos o separados? ______

Expliquen por qué ocurre eso. ______

i) Analicen su gráfica. Después respondan: ¿Cuál es la frecuencia en el primer intervalo? ______ ¿Cuáles son los números de pulsaciones que se incluyen en este intervalo? ______ ¿En cuáles intervalos se concentra la mayor frecuencia? ______

j) ¿Qué conclusión sacan de lo anterior? ______

______

k) El número normal de pulsaciones por minuto en una persona en reposo de entre 13 y 16 años es de 50 a 90. ¿Consideran que en su grupo están dentro de lo normal? ______ Expliquen por qué. ______

______

l) En su cuaderno construyan una tabla de frecuencias sin agrupar los datos. Después tracen una gráfica de barras que exprese los datos de la tabla.

m) Comparen la gráfica que trazaron en su cuaderno con la que trazaron en el inciso *g* y respondan: ¿Qué diferencias encuentran? ______

______

¿En cuál gráfica les resulta más fácil analizar los datos? ______

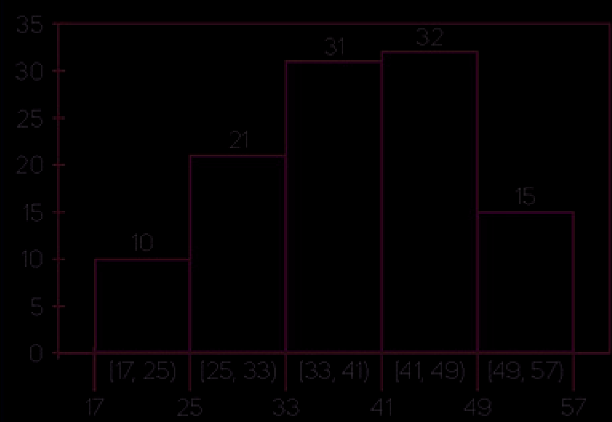
Analicen el siguiente texto y, si es necesario, regresen a corregir su trabajo. Después expónganlo frente al grupo.

Un **histograma** es una gráfica que muestra datos agrupados en intervalos. Se construye formando rectángulos que tienen como base la longitud de cada intervalo y como altura la frecuencia correspondiente. Los rectángulos quedan unidos porque donde termina un intervalo de clase empieza otro. Ejemplo:

Tabla de frecuencias

[17, 25)	10
[25, 33)	21
[33, 41)	31
[41, 49)	32
[49, 57)	15

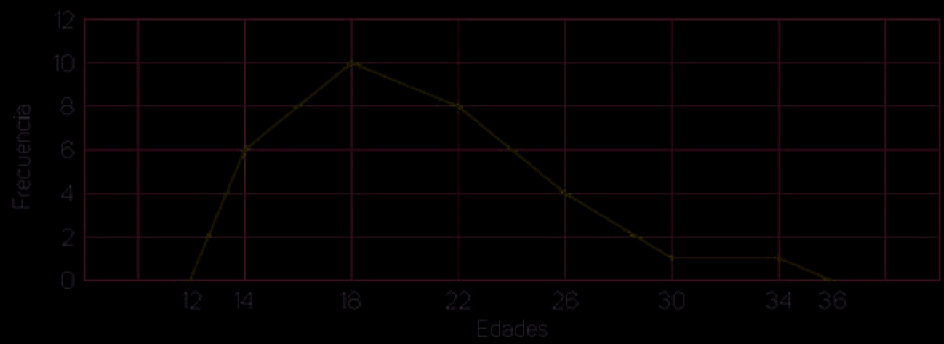
Histograma



4. Analiza la información y responde. Después haz lo que se indica.

En el servicio médico de una pequeña comunidad, se preguntó la edad a las madres primerizas (las que tendrán a su primer bebé). Con base en la información recabada, se elaboró la siguiente gráfica.

Madres primerizas por edades



a) ¿A cuántas madres se les preguntó su edad? ________

b) ¿Cuál es la edad más frecuente de madres primerizas? ________

c) ¿Cuántas madres de 12 a 16 años de edad son primerizas? ________

d) ¿Qué conclusión sacas sobre las madres primerizas en esa pequeña comunidad?

e) Esta es la lista de las edades de las madres.

25, 15, 24, 29, 13, 16, 27, 17, 26, 14, 22, 15, 20, 14, 17,
21, 16, 12, 34, 16, 18, 23, 17, 23, 19, 18, 22, 19, 21, 20

Completa la tabla de frecuencias con seis clases.

Clases de intervalos	Marca de clase	Frecuencia
[12, 16)	14	

f) Sobre la gráfica anterior, traza el histograma correspondiente.

g) ¿Qué coincidencias encuentras entre el histograma y la línea azul? ________

Reúnete con otro estudiante, comparen sus tablas, gráficas y respuestas. Si hay diferencias, discútanlas y lleguen a un acuerdo.

Polígono de frecuencias

Un **polígono de frecuencias** es una gráfica de línea asociada con un histograma. Para trazar el polígono de frecuencias, en el eje horizontal se localiza la marca de clase de cada intervalo; sobre esta se traza un punto a una altura igual a la frecuencia correspondiente y, por último, se unen esos puntos por segmentos. Al inicio y al final, los segmentos se alargan hasta cortar el eje X.

¿Vamos bien?

Realiza lo que se indica a partir de lo que has aprendido. Al terminar, compara tus respuestas con las de tus compañeros.

I. En un gimnasio se registró el peso de 54 personas. El peso menor es 25 kg y el mayor es 53 kg. Determina:

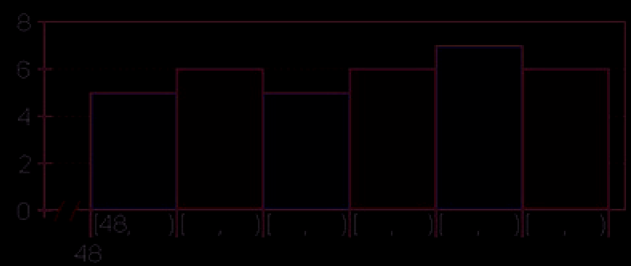
a) Rango: ______________________

b) Amplitud del intervalo si se desean cinco clases de intervalos. __________

c) Amplitud del intervalo si se desean siete clases de intervalos. __________

d) Si la amplitud de todos los intervalos es 5, ¿cómo determinas el número de clases de intervalos? ______________________

II. Se trazó el histograma de un conjunto de datos cuyo dato mayor es igual a 76. Completa el histograma escribiendo los intervalos debajo de la línea horizontal. A la derecha, construye la tabla de frecuencias correspondiente.



5. Lee la información, contesta y realiza lo que se solicita.

En un grupo de estudiantes se hizo una encuesta con dos preguntas:
Pregunta 1. ¿Cuántos minutos al día dedicas a una actividad para entretenerte usando algún medio digital o electrónico (celular, tableta, computadora, televisión, radio)? Las respuestas fueron:

60, 65, 180, 90, 180, 210, 375, 270, 370, 60, 60, 140, 65, 290, 330, 100, 130, 360, 150, 120, 185, 370, 90, 150, 180, 120, 110, 190, 160, 60, 120, 240, 125, 90

Pregunta 2. ¿Cuántos minutos al día dedicas a una actividad para entretenerte, sin usar medios digitales o electrónicos (pasear, practicar algún deporte, etcétera)?

190, 320, 290, 300, 375, 300, 270, 210, 150, 110, 240, 60, 190, 120, 370, 90, 110,
130, 150, 190, 190, 210, 270, 250, 270, 290, 310, 330, 350, 310, 350, 350, 360, 240

a) ¿A cuántos estudiantes se les aplicó la encuesta? ____________

b) Si se agrupan los datos de cada pregunta en intervalos con amplitud de 40 unidades, ¿cuántas clases de intervalos hay para los datos de la pregunta 1? ______ ¿Y para los de la pregunta 2? ____________

c) En una cuadrícula, en un mismo plano traza en tu cuaderno los dos polígonos de frecuencia correspondientes a cada pregunta. Usa colores diferentes para que te sea fácil identificarlos.

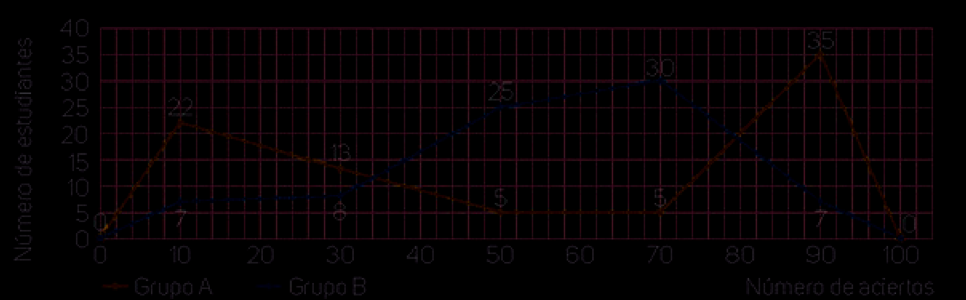
d) Analiza las gráficas y compáralas. Después responde: ¿En qué minutos las poligonales se acercan más? ____________ ¿En qué minutos se alejan más? ____________ ¿Consideras que hay alguna relación entre las respuestas a las dos preguntas? ________ Argumenta tu respuesta. ____________

¿Qué aprendí?

Trabaja lo siguiente. Al terminar, revisa tus procedimientos y tus resultados, primero con ayuda de tus compañeros y luego con tu profesor.

Se aplicó el mismo examen a dos grupos de estudiantes y se registró el número de aciertos que obtuvo cada estudiante. El siguiente polígono de frecuencias, con datos agrupados, expresa lo que ocurrió. Analiza la gráfica.

Resultados de la aplicación de un examen a dos grupos de estudiantes



a) ¿En cuántos intervalos se agruparon los datos? ____________

b) ¿En qué intervalo está el dato de 49 aciertos? ____________

c) ¿Cuál es la amplitud de cada clase de intervalo? ____________

d) Si el examen se aprueba con 50 aciertos o más, ¿en cuál de los dos grupos hubo más estudiantes aprobados? ____________

Marca con una ✓ la casilla que describe tu desempeño.

Recolecto, registro y leo datos en histogramas y polígonos de frecuencia.

Nivel de logro		
	A	Requiero ayuda para realizarlo.
		Lo hago, pero en ocasiones necesito ayuda.
	C	Lo hago de manera autónoma.

Secuencia didáctica 12. Se lee entre barras y entre líneas

Taller de tecnología

Histogramas

Abre una hoja de GeoGebra. Ubica el cursor en "Vista Gráfica" y oculta la cuadrícula colocándote en cualquier lugar de la vista gráfica y dando clic al botón derecho del ratón en el icono "Cuadrícula". En el comando "Vista", elige "Hoja de Cálculo". Se desplegará una hoja de cálculo en la parte lateral derecha.

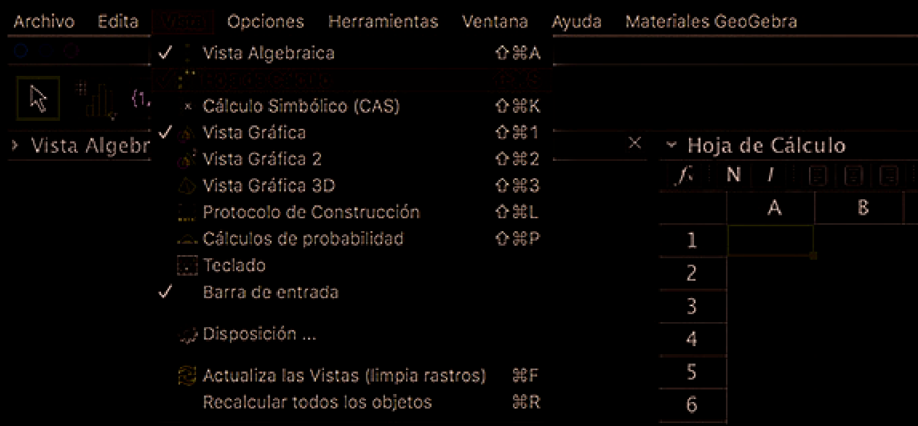


Imagen 1

1. Analiza la información y realiza lo que se indica.

   En los Juegos Olímpicos de Río de Janeiro 2016, estas fueron las 28 mejores marcas, en metros, alcanzadas en la prueba de salto de longitud varonil en la primera serie de clasificación:

   8.20, 8.24, 7.99, 8.14, 7.96, 8.12, 7.85, 8.03, 7.84, 7.31, 8.01, 7.81, 7.89, 7.82, 7.79, 7.81, 7.77, 7.79, 7.75, 7.72, 7.71, 7.65, 7.67, 7.67, 7.64, 7.66, 7.59, 7.59

   Fuente: mexico.as.com/resultados/juegos_olimpicos/resultados/atletismo/longitud/ (consulta: 29 de enero de 2018).

   Sigue las instrucciones para construir un histograma que facilite analizar los datos.

Imagen 2

   a) Ingresa las longitudes en las celdas de la columna A.
   b) Ubica el cursor en la celda donde colocaste el primer número. Haz clic en el lado izquierdo del ratón y arrástralo hasta seleccionar todos los datos. Una vez que tengas todos los datos seleccionados, haz clic con el botón derecho del ratón, selecciona "Crea" (o "Crear") y después "Lista". En el panel izquierdo aparecerá "L_1" (o "lista$_1$", dependiendo de la versión del programa) con el conjunto de datos seleccionados.

c) En la parte inferior de la pantalla, en la línea "Entrada", escribe "Clases", selecciona la opción "Clases(<Lista de datos>, <Número de clases>)". Selecciona "<Lista de datos>" y en su lugar escribe "L_1" (o "lista_1"), el nombre de la "L_1" que el programa reconoce. Selecciona "<Número de clases>" y en su lugar escribe el número de clases de intervalos, puedes poner "5". Ten cuidado de borrar los corchetes "< >". Debe quedar como se muestra en la parte inferior de la imagen.

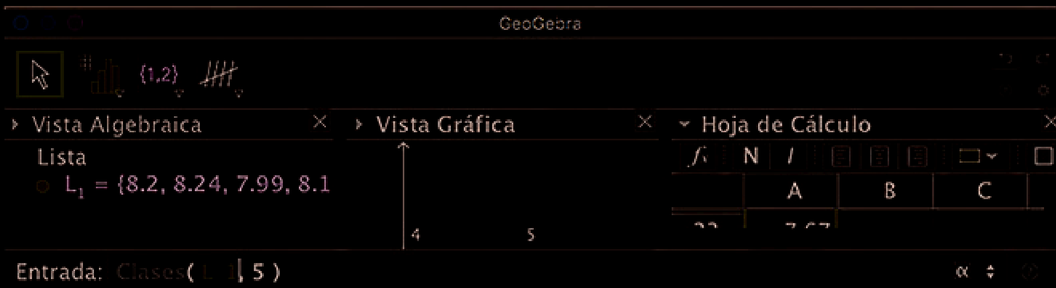


Imagen 3

Presiona la tecla de entrada Enter. Se genera otro conjunto de datos, de nombre "L_2" (o "$lista_2$"), el programa la reconoce como "L_2" (o "lista_2"). Esta lista contiene los límites inferior y superior de cada clase.

Imagen 4

d) En la línea "Entrada" escribe "Frecuencia" y elige "Frecuencia(<Lista de límites de clases>, <Lista de datos brutos>)". En el paréntesis escribe "(L_2, L_1)" o "(lista_2, lista_1)" y presiona la tecla Enter. Se genera una "L_3" ("lista_3" o "$lista_3$") que contiene las frecuencias por intervalo.

e) En la línea "Entrada" escribe "TablaFrecuencias" y nuevamente elige "(<Lista de límites de clase>, <Lista de datos brutos>)". En el paréntesis escribe "(L_2, L_1)" o "(lista_2, lista_1)" y presiona la tecla Enter. En la vista gráfica aparecerá la tabla de frecuencias.

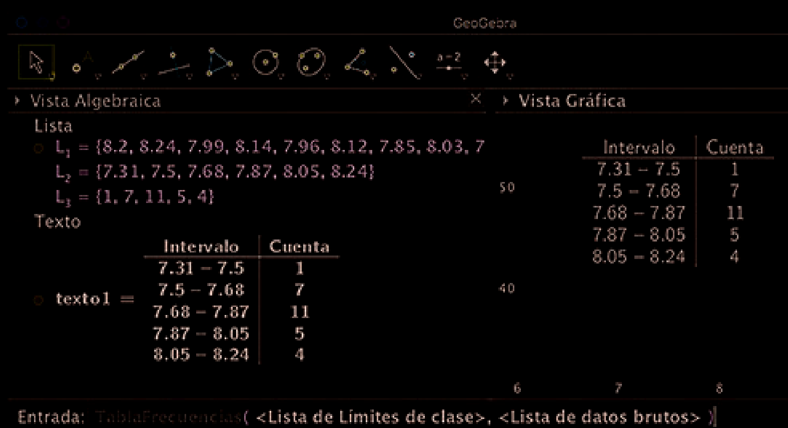


Imagen 5

f) Nuevamente en la línea "Entrada" escribe "histograma" y elige la opción "Histograma(<Lista de límites de clases>, <lista de alturas>)"; en el paréntesis escribe "(L_2, L_3)" o "(lista_2, lista_3)" y presiona la tecla Enter.

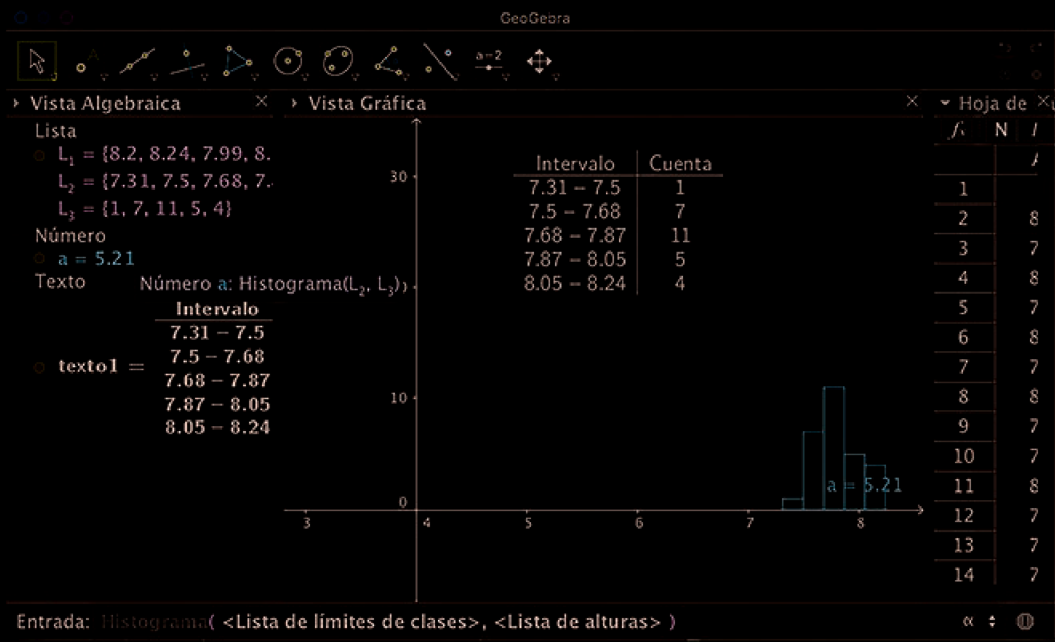


Imagen 6

g) Modifica la vista gráfica para que se vea mejor el histograma. Con la herramienta "Elige y mueve" coloca el cursor en cualquier parte de la vista gráfica, da clic derecho y elige "Vista Gráfica". Se despliega el cuadro de diálogo que aparece en el lado derecho de la siguiente imagen.

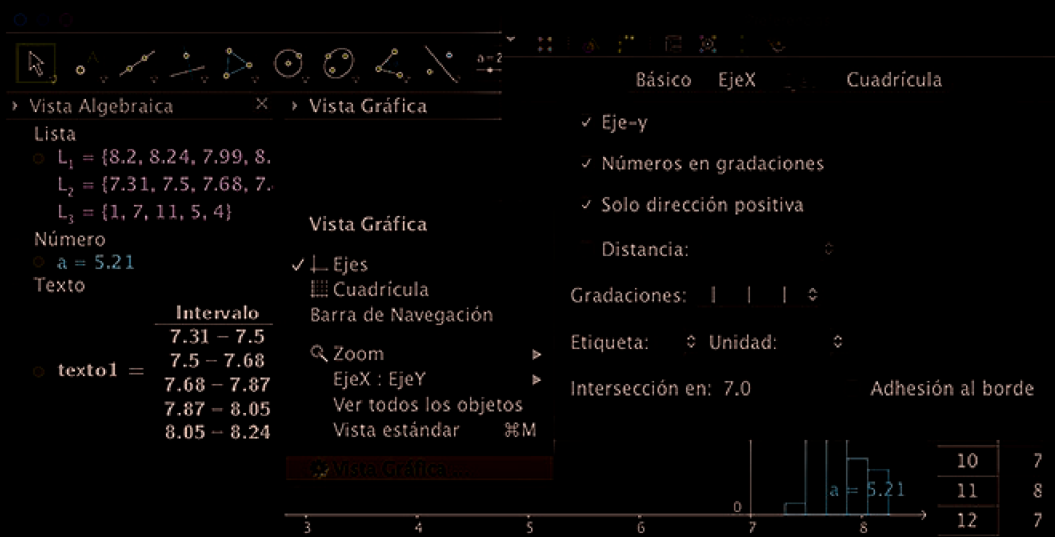


Imagen 7

En "EjeX" selecciona "Solo dirección positiva"; en "EjeY", también elige "Solo dirección positiva", y en "Intersección en" (en algunas versiones puede aparecer como "Cruce en"), escribe "7.0" (es donde quieres que el eje *Y* cruce al eje *X*). Con esta misma herramienta puedes cambiar de lugar la tabla: colocando el cursor sobre ella, presiona clic izquierdo y, sin soltarlo, desplaza el ratón.

Por último, selecciona la herramienta "Desplaza Vista Gráfica", coloca el cursor en cualquier lugar sobre el eje X y, presionando el botón izquierdo, desplaza el ratón hacia la derecha para ensanchar las columnas del histograma.

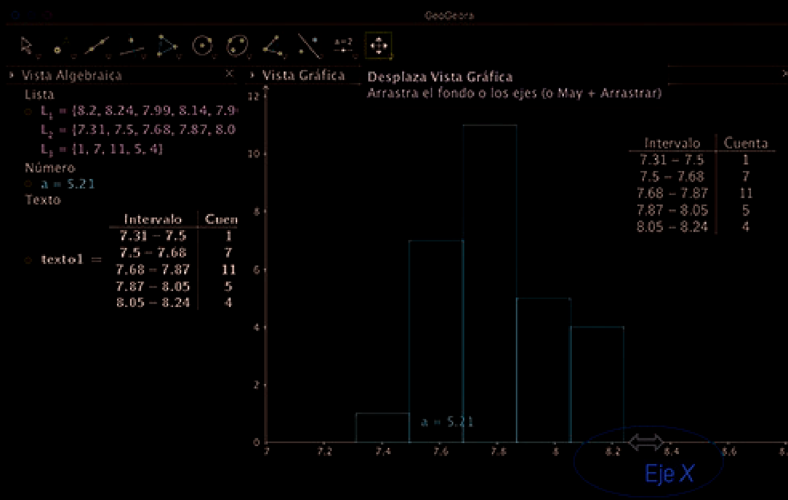


Imagen 8

2. Analiza el histograma y responde.

   a) ¿Cuál es la amplitud de los intervalos? ______

   b) ¿Cuáles son las longitudes más frecuentes? ______

   c) ¿En qué intervalos se encuentran las longitudes de los saltos de los 12 atletas que pasaron a la final? ______

   d) En el panel de "Vista Algebraica" coloca el cursor sobre la "L_2" ("lista$_2$") y da doble clic con el ratón. Cambia el número de las clases de intervalos y presiona "OK".

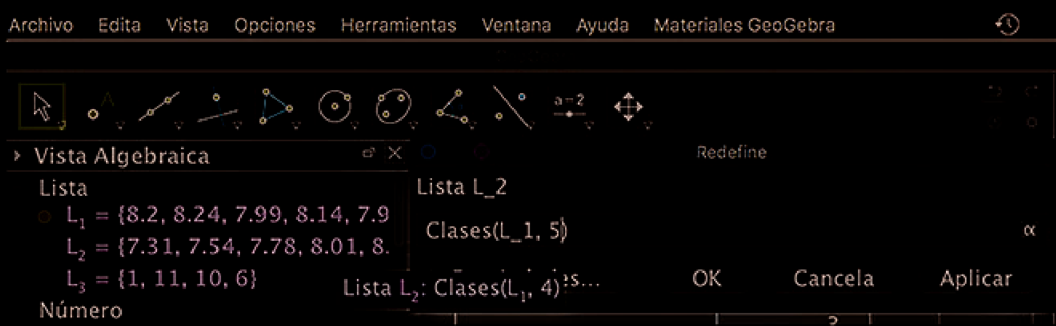


Imagen 9

Cambia varias veces el número y analiza lo que ocurre con el histograma.

¿Qué número de clases de intervalos consideras más adecuado para analizar este conjunto de datos? Argumenta por qué. ______

______

______

______

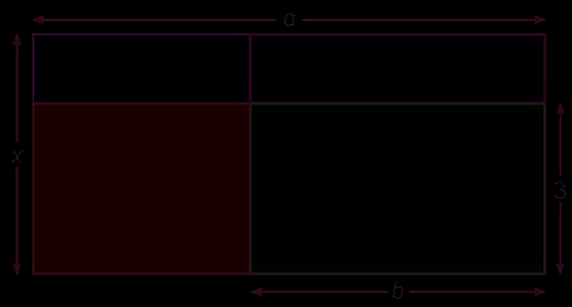
3. Construye un histograma para los siguientes datos.

Tiempo en segundos que dura la atención al cliente en una caja de un banco:

160, 166, 164, 189, 189, 188, 203, 193, 216, 193, 172, 191, 191, 185, 166, 194
187, 200, 181, 148, 176, 161, 180, 182, 205, 188, 185, 178, 186, 164, 193, 172,
187, 183, 162, 190, 205, 183, 168, 176, 163, 170, 176, 172, 179, 180, 189, 204

Elige la opción correcta. Con base en tus resultados, identifica los contenidos que necesitas repasar para mejorar tu desempeño.

1. ¿Cuál expresión algebraica no representa el área del rectángulo azul?



A) $3(a - b)$
B) $ax - (x - 3)(a - b) - b(x - 3) - 3b$
C) $(x - 3)(a - b)$
D) $ax - bx - (x - 3)(a - b)$

2. Un triángulo cuya base mide $\frac{2}{3}$ de u tiene área igual a $\frac{1}{12}$ de u^2. ¿Cuánto mide la altura del triángulo?

A) $\frac{1}{6}$ de u
B) $\frac{3}{12}$ de u
C) $\frac{1}{3}$ de u
D) $\frac{1}{24}$ de u

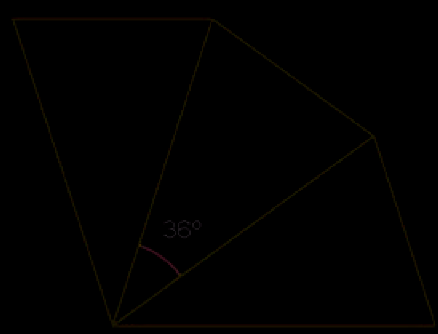
3. La maestra de Matemáticas de Nadia les dejó de tarea encontrar el resultado de $(-2)\left(\frac{5}{8}\right) \div 0.2$, pero los cuatro integrantes del equipo obtuvieron resultados diferentes. ¿Cuál de ellos hizo correctamente las operaciones?

A) Octavio: $-\frac{25}{16}$
B) Nadia: $-\frac{25}{4}$
C) Manuel: $-\frac{1}{16}$
D) Alma: $-\frac{5}{8}$

4. La suma de los ángulos interiores de un polígono es 1080°. ¿Cuántos lados tiene el polígono?

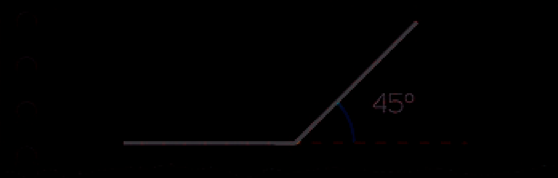
A) 8
B) 12
C) 10
D) 6

5. En la imagen se muestra un pedazo de un polígono regular. ¿Cuántos lados tiene el polígono?



A) 20
B) 10
C) 12
D) 8

6. Rodrigo se encontró el siguiente pedazo de hoja de cuaderno.



¿Qué polígono regular se puede construir con el trazo empezado?

A) Hexágono B) Pentágono C) Octágono D) No se puede saber

7. ¿Cuánto mide el ángulo central de un polígono regular de 15 lados?

A) 24° B) 30° C) 156° D) 78°

8. ¿En cuál caso las magnitudes no son directamente proporcionales ni inversamente proporcionales?

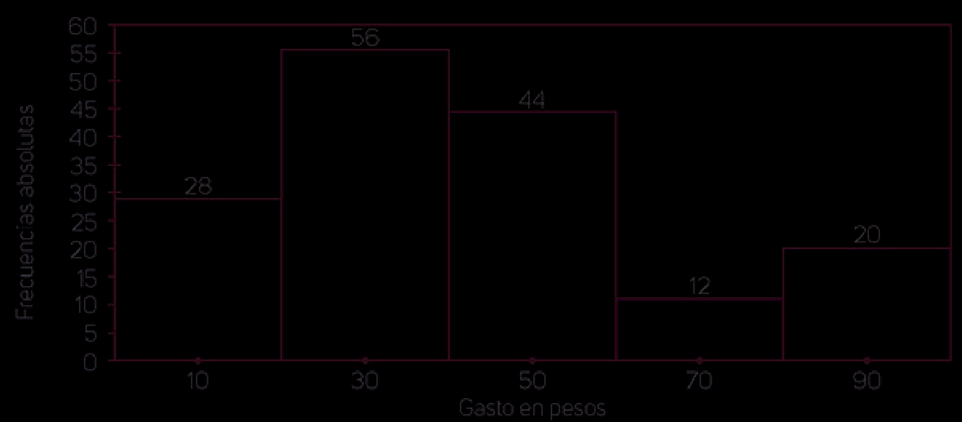
A) La distancia recorrida por un vehículo y su velocidad.
B) El precio del litro de gasolina y el monto pagado por cierta cantidad de litros.
C) El perímetro de un rectángulo y la longitud de su altura.
D) La cantidad de albañiles que construyen una casa y el tiempo que toma construirla.

9. Siete trabajadores tardan 2 horas en trasladar unas cajas a una bodega. ¿Cuánto tiempo tardan ocho trabajadores trabajando al mismo ritmo?

A) 2 h 15 min B) 1 h 45 min C) 2 h 45 min D) 1 h 30 min

10. En el histograma se muestra el gasto semanal que realizan los estudiantes de una escuela para transportarse desde sus casas. ¿Cuántos estudiantes gastan más de $40 a la semana?

Gasto semanal en transporte a la escuela



A) 84 B) 76 C) 44 D) No se puede saber

Resuelve los problemas. Con base en tus resultados, identifica los contenidos que necesitas repasar para mejorar tu desempeño.

1. Escribe dos expresiones algebraicas equivalentes que representen el número de palillos que tiene la figura *n*. ______

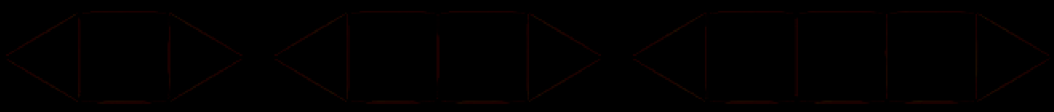


Figura 1 Figura 2 Figura 3

2. Para sostener una cerca de malla alrededor de un terreno rectangular, se colocan postes de aluminio cada $\frac{4}{5}$ de metro. Si el perímetro del terreno mide 36 metros, ¿cuántos postes se van a colocar? ______

3. En el planeta Mercurio, el más cercano al Sol, la temperatura varía de −173 °C a 427 °C. Para convertir grados Celsius a grados Fahrenheit, se usa la fórmula $°F = °C \times \frac{9}{5} + 32$. ¿Cuál es el rango de variación de la temperatura en Mercurio en grados Fahrenheit? ______

4. Responde.

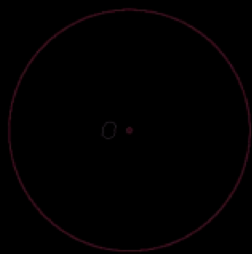
   a) El producto de dos números es $-\frac{25}{3}$. Si uno de los factores es $\frac{2}{4}$, ¿cuál es el otro factor? ______

   b) La fracción $\frac{27}{4}$ es el resultado de multiplicar $-\frac{3}{5}$ por otro factor. ¿Cuál es el otro factor? ______

5. La suma de los ángulos interiores de un polígono es 1 440°. Si se sabe que el polígono es regular, ¿cuánto mide cada uno de sus ángulos interiores? ______
Argumenta tu respuesta. ______

6. Construye un polígono regular, inscrito en la circunferencia, cuyo ángulo central mida 45°. Antes de realizar la construcción, responde.

¿Cuántos lados tendrá el polígono? ____________________



7. Explica por qué un pentágono regular no cubre el plano. ____________________

____

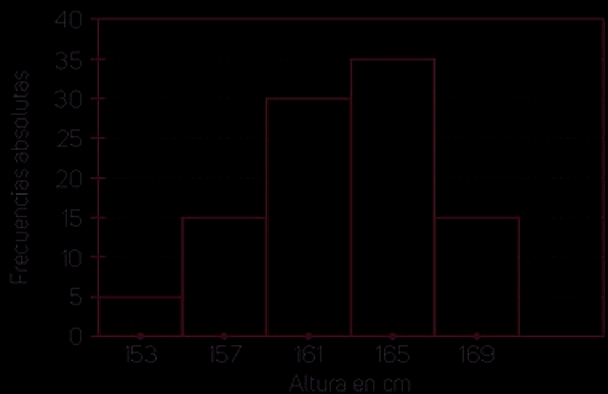
____

8. Las obreras de una fábrica de ropa tardan 6 días en elaborar un pedido de 1 000 pantalones trabajando 8 horas diarias. ¿Cuántos días tardarán en hacer el pedido si trabajan 10 horas diarias? ____________________

9. Un vehículo tarda 30 minutos en hacer un recorrido a 80 km por hora. ¿A qué rapidez viajará si hace el recorrido en 40 minutos? ____________________

10. Construye la tabla de frecuencias correspondiente al histograma.

Altura de un grupo de personas



Altura en cm	Marca de clase	Frecuencia absoluta

Trimestre 2

La distancia de la Tierra al Sol es de 1.496×10^{8} km, en promedio. Es tan grande que la luz del Sol tarda alrededor de 8 minutos en llegar a la superficie terrestre.

¡Felicidades, has llegado al segundo trimestre!

Aquí comenzarás a trabajar el concepto de potencia de un número utilizando sus propiedades en la resolución de problemas; asimismo, aprenderás qué es la raíz cuadrada de un número y cómo calcularla, y podrás expresar números gigantes o muy pequeños usando la notación científica.

Resolverás problemas calculando el área y el perímetro de polígonos regulares y estudiarás cómo se determina el área de un círculo.

En el terreno del álgebra, conocerás y utilizarás los sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas y aprenderás a resolverlos tanto gráfica como algebraicamente.

Solucionarás problemas de proporcionalidad directa e inversa y comprenderás qué significa hacer un reparto de manera proporcional.

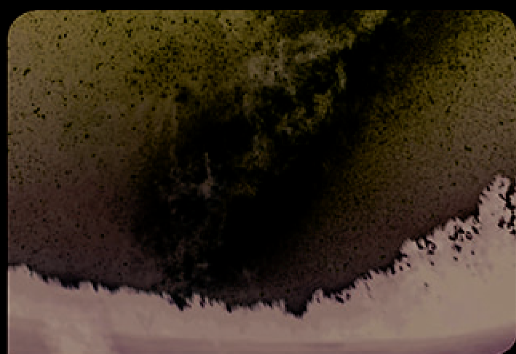
Por último, practicarás el registro, la recolección y la lectura de datos con un nuevo tipo de gráfica: la gráfica de línea.

No olvides revisar nuevamente esta sección al final del trimestre para que verifiques que hayas alcanzado los conocimientos que aquí te proponemos.

Números gigantes y números microscópicos

El gran sabio Arquímedes de Siracusa (287-212 a. n. e.), para convencer al rey Gelón de que existían números tan grandes que nadie se los podía imaginar, en su obra *El contador de arena* calculó el número de granos de arena que cabrían en todo el Universo si lo llenáramos de arena como si fuese una gran cubeta cósmica. Su resultado, de escribirlo con el sistema decimal actual, requeriría ¡ochenta mil billones de dígitos! Arquímedes inventó unidades especiales para expresar su hallazgo.

Para responder a qué distancia están los astros en el cielo o cuántos glóbulos tiene el cuerpo humano se necesitan números excesivamente grandes, como los que expresan el tamaño de nuestra galaxia (la Vía Láctea), y otros muy pequeños como para precisar el tamaño de un virus o de una célula humana. Poder operar con estos números de manera práctica ha sido un gran logro para la humanidad.



Alan Dyer Colección / age fotostock / photostock.com.mx/

Vía Láctea.

Nacieron y se desarrollaron muchas civilizaciones para poder resolver estas cuestiones. En particular, la evolución de los sistemas de numeración hasta llegar al actual sistema decimal ha sido un auténtico avance (simplemente prueba multiplicar o escribir enteros muy grandes con números romanos). El lenguaje, la estructura, el simbolismo y la simplicidad para realizar operaciones matemáticas se hace patente desde la primaria, cuando lo aprenden a usar todos los niños (como en el caso de “3 y llevamos 1”, etcétera). Este sistema posibilitó, de un modo útil, inventar formas especiales de escribir números muy grandes o muy pequeños usando potencias y notación científica, y también inventar unidades adecuadas para medirlos y nombrarlos.

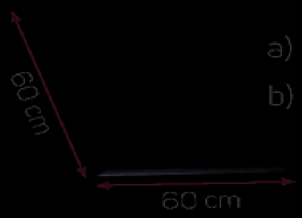
Secuencia didáctica 13

Aprendizaje esperado: Resolverás problemas de potencias con exponente entero y aproximarás raíces cuadradas.
Contenido: Resolverás problemas de raíz cuadrada de números cuadrados perfectos.

Cuadrados perfectos y su raíz

1. Analiza el enunciado y responde.

Miguel decidió cambiar el piso de su recámara, que es una superficie cuadrada y tiene un área de 36 m². Le gustan unas losetas como la que se muestra en la imagen de la izquierda.

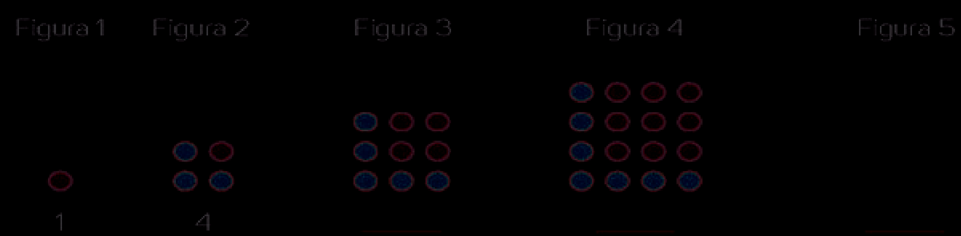


a) ¿Cuántos centímetros cuadrados tiene el área de cada loseta? ______

b) ¿Cuántas losetas se necesitan para cubrir el piso de la recámara? ______
Explica por qué. ______

- Compara tus respuestas y tu explicación con las de otros estudiantes. Si tienen diferencias, desarrollen argumentos para convencerse de qué es lo correcto.

2. Analiza la secuencia de figuras y haz lo que se indica.



a) Escribe debajo de las figuras 3 y 4 cuántos círculos tiene cada una.

b) Traza la figura 5 y escribe debajo de esta cuántos círculos tiene.

c) Escribe cuántos círculos hay en cada figura que se indica:
Figura 6: ______ Figura 7: ______ Figura 8: ______ Figura 9: ______

d) ¿Cuál es la regla para encontrar el número total de círculos de la figura *n*?
______

e) ¿Cuántos círculos tendrá la figura 317? ______

f) Escribe en la tabla si una figura con el número de círculos indicados pertenece o no a la secuencia de figuras anterior y explica por qué.

Número total de círculos en una figura	¿Es parte de la secuencia de figuras anterior?	
	Sí o no	¿Por qué?
27		
100		
48		
144		

- Compara y discute tu trabajo con el resto del grupo.

Elevar al cuadrado un número es multiplicar el número por sí mismo; por ejemplo:

$2^2 = 2 \times 2 = 4$ y $8^2 = 8 \times 8 = 64$

Los números enteros que resultan de elevar un número entero al cuadrado se llaman **cuadrados perfectos**.

Por ejemplo, 4 y 64 son cuadrados perfectos, 225 también es un cuadrado perfecto porque $15^2 = 15 \times 15 = 225$.

Cada vez que elevamos un entero al cuadrado, obtenemos un cuadrado perfecto.

¿Vamos bien?

Resuelve lo siguiente con base en lo que has aprendido. Al terminar, compara tus procedimientos y resultados con los de tus compañeros.

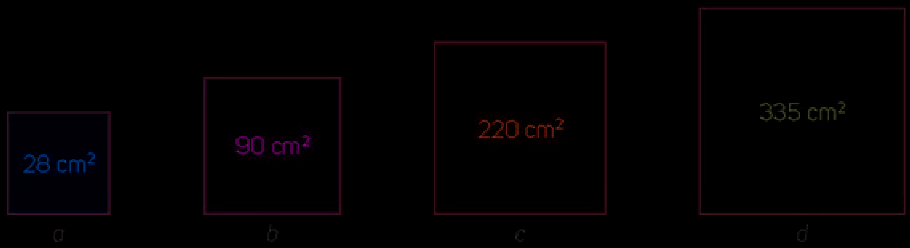
Escribe, de menor a mayor, los siguientes 18 números que son cuadrados perfectos.

1, 4, 9, 16, 25, ______, ______, ______, ______, ______, ______, ______, ______,
______, ______, ______, ______, ______, ______, ______, ______, ______ y ______

Convivo en armonía

3. Reúnete con un compañero y hagan lo que se indica.

Analicen los siguientes cuadrados. Dentro de cada uno aparece su área. La letra de abajo representa la longitud de cada lado.



a) Escriban una expresión algebraica que permita calcular el área de cada cuadrado.

______ = 28 ______ = 90 ______ = 220 ______ = 335

b) ¿El área de cada cuadrado es un cuadrado perfecto? ______ ¿Por qué? ______

______

______

c) ¿El área de cualquier cuadrado de lado x es un cuadrado perfecto? _______ ¿Por qué? ______________________________

- Expongan ante otros estudiantes sus procedimientos, respuestas y razonamientos. Después analicen los de ellos.

4. Haz lo que se indica.

a) Escribe el cuadrado de los siguientes números.

$2^2 =$ ________	$(-2)^2 =$ ________
$4^2 =$ ________	$(-4)^2 =$ ________
$6^2 =$ ________	$(-6)^2 =$ ________
$15^2 =$ ________	$(-15)^2 =$ ________
$12^2 =$ ________	$(-12)^2 =$ ________

b) Los siguientes números son cuadrados perfectos. Escríbelos como un número elevado al cuadrado de dos formas distintas.

25 = ________	25 = ________
81 = ________	81 = ________
144 = ________	144 = ________
2500 = ________	2500 = ________

c) A partir de los incisos anteriores, ¿qué relación hay entre el cuadrado de un número a y el cuadrado de su simétrico $-a$? ______________________________

Glosario

simétrico de un número.

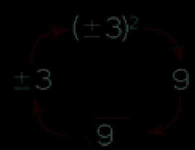
- Compara tu trabajo con el de otros compañeros. Si hay algún desacuerdo, analicen sus procedimientos y respuestas para llegar a un consenso. Usen una calculadora para comprobar sus resultados.

La raíz cuadrada de un número a, mayor o igual que cero, se denota así: $\sqrt{a}$.

El símbolo $\sqrt{}$ se llama **radical**, al número a se le llama **radicando** y el valor de $\sqrt{a}$ se llama **raíz** de a.

La raíz cuadrada de un número es la operación inversa de elevar un número al cuadrado. Eso significa que la raíz de un número a es igual a un número b siempre que el cuadrado de b sea igual al número a:

$$\sqrt{a} = b \text{ siempre que } a = b^2$$
$$\sqrt{a} = \sqrt{b^2} = b$$



Por ejemplo: $\sqrt{81} = 9$, porque $81 = 9^2$; $\sqrt{0} = 0$.

¿Vamos bien?

Resuelve lo siguiente con base en lo que has aprendido. Al terminar, compara tus resultados y procedimientos con los de otros estudiantes. Usen una calculadora para verificar sus resultados.

I. Calcula las raíces.

a) $\sqrt{64}$ = ______ d) $\sqrt{324}$ = ______
b) $\sqrt{144}$ = ______ e) $\sqrt{576}$ = ______
c) $\sqrt{225}$ = ______ f) $\sqrt{400}$ = ______

II. Mentalmente determina el número que va en el radical y escríbelo.

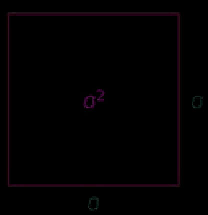
a) $\sqrt{\quad\quad}$ = 10 c) $\sqrt{\quad\quad}$ = 6 e) $\sqrt{\quad\quad}$ = 5
b) $\sqrt{\quad\quad}$ = 20 d) $\sqrt{\quad\quad}$ = 60 f) $\sqrt{\quad\quad}$ = 50

III. ¿Cuántos metros de cinta amarilla se deben colocar para cercar la orilla de un terreno cuadrado de 169 m^2 donde acaban de poner piso de concreto?

______

______

Geométricamente, obtener la raíz de un número equivale a calcular la longitud del lado de un cuadrado conociendo su área, es decir, si a^2 es el área de un cuadrado, entonces la longitud del lado del cuadrado es $\sqrt{a^2} = a$.



Como al elevar al cuadrado el número a y su simétrico $-a$ obtenemos el mismo resultado; por ejemplo, $3^2 = (-3)^2 = 9$, cada número positivo tiene dos raíces: una positiva y una negativa.

En el ejemplo, 3 es la raíz positiva de 9 y -3 es su raíz negativa. El símbolo $\sqrt{\quad}$ se reserva para la raíz positiva, y para la raíz negativa, se antecede el símbolo menos:

$$\sqrt{9} = \sqrt{3^2} = 3 \quad \text{y} \quad -\sqrt{9} = -\sqrt{(-3)^2} = -3$$

5. En parejas, realicen lo que se indica.

a) Escriban el cuadrado de los siguientes números.

$3^2 =$ ______ $9^2 =$ ______ $15^2 =$ ______ $1^2 =$ ______

$0.9^2 =$ ______ $0.1^2 =$ ______ $0.54^2 =$ ______ $0.7^2 =$ ______

b) Escriban el símbolo "<" (menor) o ">" (mayor) según corresponda.

3^2 ____ 3 8^2 ____ 8 15^2 ____ 15

0.9^2 ____ 0.9 0.54^2 ____ 0.54 0.7^2 ____ 0.7

c) ¿Cuándo un número es menor que su cuadrado? ______________

¿Y cuándo es mayor que su cuadrado? ______________

d) Calculen las siguientes raíces.

$\sqrt{4} =$ ____ $\sqrt{64} =$ ____ $\sqrt{81} =$ ____ $\sqrt{121} =$ ____

e) Si el radicando x es mayor que 1, ¿qué es mayor: x o $\sqrt{x}$? ______________

f) Escriban el resultado de las operaciones.

$\frac{5}{10} \times \frac{5}{10} =$ ____, $\frac{9}{10} \times \frac{9}{10} =$ ____, $\frac{4}{100} \times \frac{4}{100} =$ ____, $\frac{7}{1000} \times \frac{7}{1000} =$ ____

$0.5 \times 0.5 =$ ____, $0.9 \times 0.9 =$ ____, $0.04 \times 0.04 =$ ____, $0.007 \times 0.007 =$ ____

g) Ahora escriban el resultado de las raíces.

$\sqrt{0.25} =$ ____, $\sqrt{0.81} =$ ____, $\sqrt{0.0016} =$ ____, $\sqrt{0.000049} =$ ____

h) En cada operación del inciso *g*, comparen el radicando con la raíz. ¿Cuál es mayor?

____

i) Escriban el símbolo "<" o ">", según corresponda.

25 ____ 36, 144 ____ 100, 0.09 ____ 0.36, 0.36 ____ 0.16

$\sqrt{25}$ ____ $\sqrt{36}$, $\sqrt{144}$ ____ $\sqrt{100}$, $\sqrt{0.09}$ ____ $\sqrt{0.36}$, $\sqrt{0.36}$ ____ $\sqrt{0.16}$

j) ¿Encuentran alguna relación entre las desigualdades de la primera línea del inciso anterior y las de la segunda? ________ Si un número a es menor que otro número b, ¿cómo es la relación entre sus raíces? ______________

Comparen sus resultados con los de sus compañeros. Discutan y lleguen a un acuerdo sobre sus respuestas en los incisos *c*, *d*, *e* y *g*. Después analicen la siguiente información.

- Cuando un número a es mayor que 1, su raíz es menor que el número a, es decir, si $1 < a$, entonces $\sqrt{a} < a$. Por ejemplo: $1 < 9$, $\sqrt{9} = 3 < 9$.
- Cuando un número b es mayor que 0 y menor que 1, el número b es menor que su raíz, es decir, si $0 < b < 1$, entonces $b < \sqrt{b}$. Por ejemplo: $0.25 < 1$, $0.25 < \sqrt{0.25} = 0.5$.
- Si dos números satisfacen la relación $x < y$, sus raíces conservan la misma relación: $\sqrt{x} < \sqrt{y}$. Por ejemplo: $49 < 144$, $7 = \sqrt{49} < \sqrt{144} = 12$.

¿Vamos bien?

Resuelve lo siguiente con base en lo que has aprendido. Al terminar, usa una calculadora para verificar tus resultados.

Mentalmente, sin hacer las operaciones correspondientes, escribe el símbolo "<" o ">" según corresponda.

a) $\sqrt{225}$ ______ $\sqrt{484}$

b) $\sqrt{0.101}$ ______ $\sqrt{0.0225}$

c) $\sqrt{784}$ ______ $\sqrt{784}$

d) $\sqrt{0.1225}$ ______ 0.1225

e) $\sqrt{844}$ ______ $\sqrt{900}$

f) $\sqrt{0.1001}$ ______ $\sqrt{0.095}$

6. En equipos, realicen las operaciones indicadas en la tabla y respondan.

$10 \times 10 =$	$\sqrt{100} =$	$60 \times 60 =$	$\sqrt{3600} =$
$20 \times 20 =$	$\sqrt{400} =$	$70 \times 70 =$	$\sqrt{4900} =$
$30 \times 30 =$	$\sqrt{900} =$	$80 \times 80 =$	$\sqrt{6400} =$
$40 \times 40 =$	$\sqrt{1600} =$	$90 \times 90 =$	$\sqrt{8100} =$
$50 \times 50 =$	$\sqrt{2500} =$	$100 \times 100 =$	$\sqrt{10000} =$

a) ¿Cuántas cifras tiene la raiz de un número menor que 100? ______

b) ¿Cuántas cifras tiene la raiz de un número que está entre 100 y 9 000? ______

c) ¿Cuántas cifras tiene la raiz $\sqrt{2704}$? ______

d) ¿Entre qué números de la tabla está 2704? ______

e) ¿Entre qué números cuadrados perfectos está 27? ______

f) ¿Cuál de las raíces de los dos números del inciso anterior asignarían a $\sqrt{2704}$ como primera cifra (de izquierda a derecha)? ______

g) Por tanto, encuentren el valor de $\sqrt{2704}$. ______

h) Completen la tabla.

	Múltiplos consecutivos de 10 entre los que se encuentra	Primera cifra de la raíz
529		
3364		
1296	Entre 30 y 40	3
676		
7396		

Comparen sus respuestas con las de sus compañeros. Usen una calculadora para verificar sus resultados.

Aplico

¿Qué aprendí?

Resuelve los siguientes ejercicios y problemas. Al terminar, revisa tus procedimientos y resultados, primero con ayuda de tus compañeros y luego con tu profesor. Si encuentras errores, corrígelos.

1. Escribe los cuadrados perfectos que se encuentran entre los números de la primera columna.

1 y 100	1, 4, 9,
101 y 200	121,
201 y 300	
301 y 400	
401 y 500	

2. Analiza cada afirmación y escribe "Verdadero" o "Falso", según corresponda.

Afirmación	Verdadero o Falso
Hay dos números que tienen el mismo cuadrado.	
Un cuadrado de área *x* tiene lado igual a raíz de *x*.	
El cuadrado de algunos números es negativo.	
La raíz cuadrada de algunos números es negativa.	
La raíz cuadrada de un número positivo siempre es menor que el mismo número.	
El cuadrado de un número siempre es mayor que 1.	

3. Escribe el número faltante.

a) $\sqrt{\quad\quad} = 11$ e) $\sqrt{\quad\quad} = 49$ i) $\sqrt{\quad\quad} = 0.625$

b) $\sqrt{\quad\quad} = 23$ f) $\sqrt{\quad\quad} = 53$ j) $\sqrt{0.25} =$ ____

c) $\sqrt{\quad\quad} = 32$ g) $\sqrt{289} =$ ____ k) $\sqrt{0.0025} =$ ____

d) $\sqrt{\quad\quad} = 27$ h) $\sqrt{\quad\quad} = 0.32$ l) $\sqrt{0.000025} =$ ____

4. Un cine tiene **256** butacas con el mismo número de butacas a lo largo que a lo ancho. ¿Cuántas butacas hay en cada fila? ____

5. ¿Uniendo **75** mosaicos cuadrados se puede construir un cuadrado? ____ Explica por qué. ____

6. En cada casilla del cuadrado B, escribe la raíz de la casilla correspondiente del cuadrado A. Al final, la suma de los números en cada fila, columna y diagonal en el cuadrado B debe ser igual a 51.

A

196	121	676
841	289	25
64	529	400

B

7. Una fosa de clavados tiene una base cuadrada de 400 m^2 de área. ¿Cuál es el perímetro de la fosa? ______

8. En una reunión de amigos se reparten 204 fichas. Después del reparto, cada persona recibió tantas fichas como personas había en la reunión, y sobraron ocho fichas. ¿Cuántos amigos estaban en la reunión? ______

9. Una tabla rectangular está formada por dos cuadrados iguales. El área de la tabla es de 72 cm^2. Calcula el perímetro de la tabla.

Perímetro de la tabla = ______

10. Al carpintero don Joel le encargaron un tablero de ajedrez de madera. El cliente le dio estas instrucciones: "El tablero debe ser un cuadrado con un área de 2 304 cm^2 y con 64 casillas cuadradas, todas del mismo tamaño".

a) ¿Cuánto mide cada lado del tablero? ______

b) ¿Cuántas casillas debe colocar don Joel a lo largo del tablero? ______ ¿Y a lo ancho? ______ Explica por qué. ______

c) ¿Cuál es la raíz cuadrada del área de cada casilla? ______

Explica por qué. ______

Marca con una ✓ la casilla que describe tu desempeño.

Contenido	
Resuelvo problemas de raíz cuadrada de números cuadrados perfectos.	
Nivel de logro	A Requiero ayuda para realizarlo.
	Lo hago, pero en ocasiones necesito ayuda.
	C Lo hago de manera autónoma.

Secuencia didáctica 14

Aprendizaje esperado: Resolverás problemas de potencias con exponente entero y aproximarás raíces cuadradas.
Contenido: Resolverás problemas de raíz cuadrada y aproximación de raíces.

Aproximando raíces

1. Analiza el enunciado y responde.

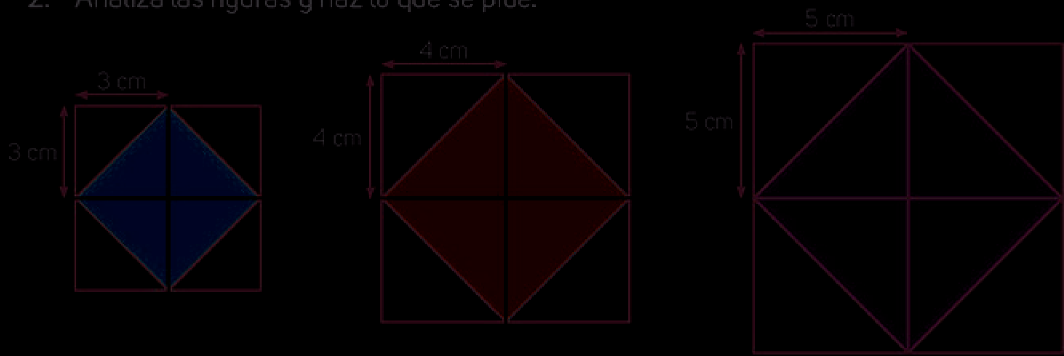
   En un terreno cuadrado se quieren plantar filas de árboles con el mismo número de árboles en cada fila y en cada columna.

   a) ¿Cuál es el número máximo de árboles que se pueden colocar en cada fila, si se tienen en total 28 árboles? ________ ¿Cuántos árboles sobran? ________

   b) ¿Cuál es el número máximo de árboles que se pueden colocar en cada fila, si se tienen en total 147 árboles? ________ ¿Cuántos árboles sobran? ________

Compara tus procedimientos y tus respuestas con los de otros estudiantes. Trabajen la siguiente actividad y después regresen a revisar esta.

2. Analiza las figuras y haz lo que se pide.



   a) Calcula el área de cada cuadrado de color.

   Rojo: ____________ Azul: ____________ Verde: ____________

   b) Si denotamos con a la longitud del lado del cuadrado rojo, ¿cómo expresarías el área de este cuadrado en términos de a? ________ ¿De qué otra manera se puede expresar el lado de un cuadrado en términos de su área? ________

   ____

   ____

   c) Expresa la longitud del lado de cada cuadrado como una raíz.

   Rojo: ____________ Azul: ____________ Verde: ____________

   d) Si las figuras anteriores formaran parte de una sucesión, traza en tu cuaderno la cuarta figura. Úsala para expresar con una raíz la longitud de la diagonal del cuadrado de lado 6 cm. ________________

   e) Hasta ahora, has calculado el área de cuatro cuadrados. ¿Alguna de las cantidades resultantes es un cuadrado perfecto? ________________

   ¿Por qué? ____

   ____

f) Usa la calculadora para escribir la longitud del lado de los cuadrados de color, con tantas cifras decimales como aparezcan en tu calculadora.

Rojo: ____________ Azul: ____________ Verde: ____________

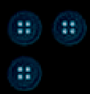
Compara tus cálculos y tus respuestas con los de tus compañeros. Revisa si en el inciso *f* todos obtuvieron la misma cantidad de números decimales.

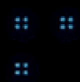
Solo los números que son **cuadrados perfectos tienen como raíz cuadrada un número entero.** Los números enteros que no son cuadrados perfectos tienen como raíz cuadrada números con una infinidad de cifras decimales. El valor que arroja la calculadora es una aproximación al valor de la raíz cuadrada.

Geométricamente, si el área de un cuadrado no es un número cuadrado perfecto, el lado del cuadrado, que es la raíz del área, no es un número entero.

3. Analiza el problema con un compañero y hagan lo que se solicita.

La costurera Érika quiere construir organizadores para sus botones. Dibuja diseños de cajones cuadrados con casillas cuadradas del mismo tamaño para colocar un botón en cada casilla. En un cajón pretende colocar 20 botones rojos y en otro 32 amarillos. Érika empezó a trazar los diseños de los dos cajones y dibujó los primeros tres botones en cada uno.





a) ¿Cuántas casillas por lado debe tener el cajón cuadrado para poder colocar el mayor número de botones rojos? __________ Expliquen por qué. ____________

____

¿Cuántos botones rojos podrán colocar en este cajón? ____________

¿Cuántos botones rojos sobran? ____________

b) Para poder colocar el mayor número de botones amarillos en un cajón cuadrado, escribe lo que se pide:

Casillas por lado: ________ ¿Por qué? ____________

____

Total de botones en el cajón: __________ Botones que sobran: __________

c) Terminen de dibujar los dos diseños y los botones que pueden colocarse en cada cajón.

d) Si quisieran construir un cajón cuadrado para poder colocar el mayor número posible de 50 botones verdes, ¿cuántas casillas debe tener el cajón en cada lado? ______ ¿Cuántos botones se pueden colocar? ______

¿Cuántos botones sobran? ______

e) ¿Son cuadrados perfectos los números 20, 32 y 50? ______ ¿Por qué? ______

______

______

f) Escriban el primer cuadrado perfecto menor y el primero mayor de cada uno de los tres números.

$\_\_\_ < 20 < \_\_\_$ $\quad$ $\_\_\_ < 32 < \_\_\_$ $\quad$ $\_\_\_ < 50 < \_\_\_$

g) Escriban entre qué números se encuentran las raíces de 20, 32 y 50.

$\_\_\_ < \sqrt{20} < \_\_\_$ $\quad$ $\_\_\_ < \sqrt{32} < \_\_\_$ $\quad$ $\_\_\_ < \sqrt{50} < \_\_\_$

h) Revisen sus respuestas de la actividad 1 y, de ser necesario, corríjanlas.

Comparen su trabajo con el resto del grupo. Si hay diferencias, analícenlas y lleguen a un acuerdo, en particular sobre el último inciso.

La raíz de un número entero *a* que no es un cuadrado perfecto se encuentra entre la raíz de los dos primeros cuadrados perfectos consecutivos, entre los que está el número *a*.

Por ejemplo:

Si $a = 115$, entonces $10 < \sqrt{115} < 11$, porque $10^2 < 115 < 11^2$

¿Vamos bien?

Aplica lo que has aprendido para completar lo siguiente. Al terminar, compara tus procedimientos y los resultados que obtuviste con los de tus compañeros.

Completa.

a) $\_\_\_ < \sqrt{12} < \_\_\_$, porque $\_\_\_ < 12 < \_\_\_$

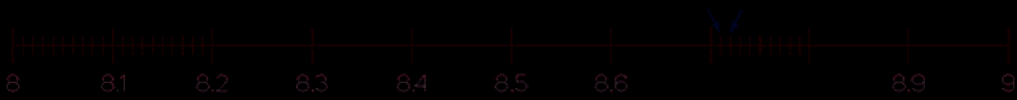
b) $\_\_\_ < \sqrt{18} < \_\_\_$, porque $\_\_\_ < \_\_\_ < \_\_\_$

c) $\_\_\_ < \sqrt{26} < \_\_\_$, porque $\_\_\_ < \_\_\_ < \_\_\_$

d) $\_\_\_ < \sqrt{84} < \_\_\_$, porque $\_\_\_ < \_\_\_ < \_\_\_$

4. **En equipo, analicen el problema y realicen lo que se pide.**

En un grupo, la maestra pidió a los estudiantes dar un valor aproximado de $\sqrt{76}$ con tres cifras decimales. Mónica entregó una hoja con lo siguiente.



$$64 < 76 < 81$$

$$8 < \sqrt{76} < 9$$

$(8.5)^2 = 72.25$ $(8.6)^2 = 73.96$ $(8.7)^2 = 75.69$ $(8.8)^2 = 77.44$

$$8.7 < \sqrt{76} < 8.8$$

$(8.75)^2 = 76.56$ $(8.73)^2 = 76.21$ $(8.72)^2 = 76.03$ $(8.71)^2 = 75.86$

$$8.71 < \sqrt{76} < 8.72$$

$$8.717 < \sqrt{76} < 8.718$$

a) ¿Cuál es la distancia de 8.7 a 8.8? ______ ¿Y de 8.71 a 8.72? ______

b) ¿Consideran que Mónica logra aproximarse a la raíz de 76? ______ ¿Por qué?

c) Describan lo que hizo Mónica para llegar a la última línea roja de su cálculo.

d) Desarrollen un procedimiento como el de Mónica para encontrar dos números con cuatro cifras decimales, uno mayor que 8.717 y otro menor que 8.718, entre los que se encuentra $\sqrt{76}$.

e) Usen una calculadora para encontrar una aproximación de $\sqrt{76}$. Comparen las primeras tres cifras decimales con los números encontrados por Mónica en la última línea roja de su cálculo. ¿Con cuál de los dos números coinciden las tres primeras cifras decimales? ______

Comparen con los números encontrados por ustedes en el inciso *d*. ¿La cuarta cifra decimal coincide con alguno de sus dos números? ______ Si no, revisen su procedimiento, encuentren el error y corríjanlo.

f) Desarrollen un procedimiento como el de Mónica para encontrar los dos números, con dos cifras decimales, que más se aproximan a $\sqrt{57}$. Apóyense en la recta para ubicar en ella los dos números que encuentren.

g) Usen la calculadora para aproximar $\sqrt{57}$. Comparen su resultado con los números que encontraron en el inciso anterior. Si no coinciden las primeras dos cifras decimales de su primer número con los de la calculadora, revisen su procedimiento, encuentren el error y corríjanlo.

- Comparen su trabajo con el de los demás equipos. Discutan si el procedimiento desarrollado sirve para aproximar la raíz de cualquier número.

¿Vamos bien?

Aplica lo que has aprendido para realizar lo siguiente. Al terminar, usa la calculadora para comparar tus resultados. Si no obtuviste las cifras correctas, encuentra el error y corrígelo.

Escribe una aproximación, con tres cifras decimales, de cada raíz.

a) $\sqrt{2}$ ____________ e) $\sqrt{350}$ ____________

b) $\sqrt{5}$ ____________ f) $\sqrt{92}$ ____________

c) $\sqrt{28}$ ____________ g) $\sqrt{18}$ ____________

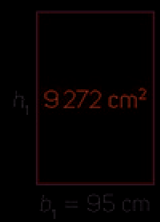
d) $\sqrt{34}$ ____________ h) $\sqrt{47}$ ____________

5. Analicen el texto en parejas y sigan las instrucciones.

Otra forma de aproximar la raíz cuadrada de un número N es construyendo rectángulos de área N que se parezcan cada vez más a un cuadrado. Se trata de un método eficaz desarrollado por los babilonios.

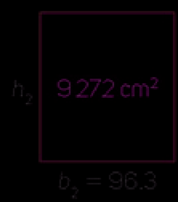
Por ejemplo, para aproximar $\sqrt{9272}$, empezamos eligiendo la base del primer rectángulo, puede ser cualquier número menor que 9 272, lo usual es que sea un divisor del número.

Aquí elegimos como base $b_1 = 95$ cm y calculamos la altura del rectángulo, h_1, sabiendo que su área es de 9 272 cm².



Como el área del rectángulo es el producto de la base por la altura, tenemos que $95h_1 = 9272$, entonces, despejando h_1, se obtiene: $h_1 = \frac{9272}{95} = 97.6$ cm.

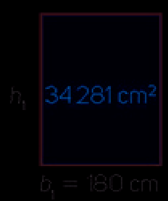
Para construir un segundo rectángulo, se toma como base, b_2, el promedio entre h_1 y b_1: $b_2 = \frac{95 + 97.6}{2} = 96.3$ cm y calculamos la altura h_2, sabiendo que el área del rectángulo es 9 272 cm².



$$96.3h_2 = 9\,272, \text{ así } h_2 = \frac{9272}{96.3} = 96.28 \text{ cm}$$

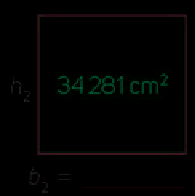
Analicen los lados de los dos rectángulos, observen que el verde ya se parece más a un cuadrado.

a) Apliquen el método de los babilonios para encontrar una aproximación a $\sqrt{34281}$. Empiecen con $b_1 = 180$, ya que $180^2 = 32400 < 34281$.



$h_1 =$ ________ $=$ ________

$b_2 = \frac{b_1 + h_1}{2} = \frac{\quad}{2} =$ ________



$h_2 =$ ________ $=$ ________

$b_3 = \frac{b_2 + h_2}{2} = \frac{\quad}{2} =$ ________

b) ¿Consideran que b_3 se aproxima a la raíz de 34 281? ________ ¿Por qué? ________

____

____

Comparen su desarrollo con el de otros estudiantes. Si hay diferencias, discútanlas. Revisen sus cálculos y si encuentran errores, corríjanlos.

6. Lee el problema con otro estudiante y hagan lo que se solicita.

Inés le enseña a su hermano menor, Abel, a construir una pirámide. Usa cuadrados de color, y va construyendo la pirámide de arriba abajo.

Nivel	Pirámide	Número de cuadrados en el nivel	Total de cuadrados en la pirámide
1		1	1
2		3	4
3			
4			

a) En las columnas de la derecha escriban el número de cuadrados en cada nivel y el total de cuadrados acumulados en la pirámide.

b) Escriban una regla que permita calcular lo que se pide.

Cuadrados en el nivel n: ____________ Total de cuadrados en la pirámide: ________

c) Si saben el número total de cuadrados hasta un cierto nivel, ¿qué harían para saber de qué nivel se trata? ____________________

d) Si Abel tiene en total siete cuadrados de color, ¿hasta qué nivel puede construir su pirámide completa? ____________ ¿Cuántos cuadrados alcanza a colocar en el siguiente nivel? ____________ ¿Cuántos cuadrados debe haber en este siguiente nivel? ____________

e) Realicen la operación indicada. Escriban el resultado como un número con solo dos cifras decimales.

$$\textit{Número de nivel que queda completo} + \frac{\textit{Número de cuadrados que alcanza a colocar en el siguiente nivel}}{\textit{Número de cuadrados que debe tener este nivel completo}} \quad \_\_\_\_ + \_\_\_\_ = \_\_\_\_$$

f) Con una calculadora aproximen la raíz de 7 con una cifra decimal. ____________

¿Se parece al número que calcularon en el inciso anterior? ____________

g) Consideren que Abel tiene 42 cuadrados en total y respondan.

¿Entre qué números cuadrados perfectos está 42? ____________

¿Hasta qué nivel se puede construir completa la pirámide? ____________

¿Cuántos cuadrados se alcanzan a colocar en el siguiente nivel? ____________

¿Cuántos cuadrados debe tener este siguiente nivel? ____________

h) Realicen la misma operación del inciso *e* con los datos del inciso anterior y comparen su resultado con una aproximación a $\sqrt{42}$ (aproximen esta raíz con dos cifras decimales usando una calculadora).

____ + ____ = ____ Aproximación $\sqrt{42}$ = ____

Discutan en grupo sobre las ventajas y las desventajas de este método para aproximar raíces.

¿Qué aprendí?

Resuelve los siguientes ejercicios y problemas. Al terminar, revisa tus procedimientos y tus resultados, primero con ayuda de tus compañeros y luego con tu profesor. Si encuentras errores, corrígelos.

1. Escribe los enteros consecutivos entre los que se encuentra cada raíz.

a) ______ $< \sqrt{39} <$ ______ c) ______ $< \sqrt{15} <$ ______

b) ______ $< \sqrt{94} <$ ______ d) ______ $< \sqrt{13} <$ ______

2. Escribe el número entero que falta.

a) $5.3 < \sqrt{} < 5.4$ c) $8.366 < \sqrt{} < 8.367$

b) $3.87 < \sqrt{} < 3.88$ d) $15.394 < \sqrt{} < 15.395$

3. En un almacén se deben acomodar 115 cajas con base cuadrada para cubrir una superficie cuadrada. Las cajas deben colocarse juntas sin dejar espacio entre estas.

a) ¿Cuántas cajas se colocarán en cada lado del mayor cuadrado que se puede formar? ______

¿Cuántas cajas sobrarán? ______

b) Si la base de cada caja tiene un área de 90 cm^2, ¿cuánto mide el lado de la base de cada caja? Aproxima con una cifra decimal. ______

4. En una fábrica venden tela a un precio de p pesos el metro. En una ocasión vendieron tantos metros de tela como el precio de la tela por metro; es decir, vendieron p de metros de tela y el pago recibido fue de $156.25.

a) Escribe una expresión algebraica que relacione el precio p por metro de tela y la cantidad p que vendieron con el pago recibido. ______

¿Cuál es el precio de cada metro de tela? ______

5. Aplica el método de los babilonios para aproximar $\sqrt{2160}$ con cuatro cifras decimales.

Marca con una ✓ la casilla que describe tu desempeño.

Contenido		
Resuelvo problemas de raíz cuadrada y aproximación de raíces.		
Nivel de logro	A	Requiero ayuda para realizarlo.
	B	Lo hago, pero en ocasiones necesito ayuda.
	C	Lo hago de manera autónoma.

Secuencia didáctica 15

Aprendizaje esperado: Resolverás problemas de potencias con exponente entero y aproximarás raíces cuadradas.
Contenido: Resolverás problemas de potencias con exponente entero.

Las potencias

1. Reúnete con dos compañeros, analicen la información y respondan.

En un laboratorio se estudia cómo se reproduce un parásito unicelular y se observa que, en ciertas condiciones, cada parásito se divide en dos parásitos cada día.

Glosario

parásito.

1.er día 2.º día 3.er día 4.º día

a) Debajo de la ilustración anterior, escriban el número de parásitos que corresponde al número de días transcurridos.

b) Escriban como un producto de factores iguales cada número anterior.

1.er día: ______ 2.º día: ______ 3.er día: ______ 4.º día: ______

c) ¿Cuántos parásitos habrá el sexto día? Escriban su respuesta como un entero y como un producto de factores iguales.

Producto de factores: ______ Entero: ______

d) ¿Cuántas veces aparece el factor del inciso anterior? ______ Discutan cómo expresarían ese producto de forma resumida, sin escribir toda la multiplicación, y anoten su acuerdo. ______

Comparen sus respuestas con el resto del grupo, y si detectan errores, corríjanlos.

2. Analiza la sucesión de números y haz lo que se indica.

3, 9, 27, 81, 243...

a) Completa la tabla expresando cada término de la sucesión como un producto de factores iguales y el número de veces que aparece este factor.

Término	3	9	27	81	243
Producto de factores iguales					
Veces que aparece el factor					

b) ¿Cuál es el décimo término de la sucesión? ______

c) Redacta una regla para encontrar el término *n* de la sucesión. ______

______

Compara tu regla con la de otros estudiantes y lleguen a un acuerdo.

La **potencia n de un número a** es la multiplicación repetida del número a tantas veces como lo indique el número n, y se denota así:

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ factores}}, \text{ con } n \text{ un número entero positivo}$$

El número a se llama *base* y el número entero n se llama *exponente*. Por ejemplo, la potencia 5 del número 4 es: $4^5 = 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 1024$, la base es 4 y el exponente es 5.

Glosario

multiplicación repetida de un número entero.

3. Calcula las siguientes potencias y completa los enunciados.

$1^2 =$ ______ $1^3 =$ ______ $1^4 =$ ______ $0^2 =$ ______ $0^3 =$ ______ $0^4 =$ ______

- El 1 elevado a cualquier potencia entera $n \geq 1$, es igual a ______, porque ______
______
- El 0 elevado a cualquier potencia entera $n \geq 1$, es igual a ______, porque ______
______

El 1 elevado a cualquier potencia n es 1 y el 0 elevado a cualquier potencia n es 0. Es decir, $1^n = 1$ y $0^n = 0$.

4. Trabaja con otro estudiante esta actividad.

a) Completen la tabla.

Potencia	Desarrollo	Resultado	Base	Exponente
$(-3)^2$				
$(-3)^3$				
$(-3)^4$	$(-3)^1 \times (-3)^1 \times (-3)^1 \times (-3)^1$	81	−3	4
$(-3)^5$				

b) ¿Cómo es el exponente de los resultados que son positivos? ______
¿Y el de los que son negativos? ______

c) Si a es un número positivo, ¿qué signo tiene el resultado de a^2? ______
¿Y el de $(-a)^2$? ______ ¿Y el de a^3? ______ ¿Y el de $(-a)^3$? ______

d) ¿Una potencia par de un número negativo es siempre positiva? ______ ¿Por qué?
______

e) ¿Qué signo tiene cualquier potencia impar de un número negativo? ______
Expliquen por qué. ______

Contrasten sus argumentos con los de sus compañeros. Si hay diferencias, analícenlas para llegar a un acuerdo.

5. Haz lo que se indica.

a) Escribe 7^5 y 7^3 como producto de sietes. ____________ y ____________

b) Ahora escribe todos los factores que forman el producto $7^5 \times 7^3$.

____________ ¿A qué potencia de 7 es igual este producto?

____

c) Determina de manera análoga la potencia de 11 que resulta de realizar la multiplicación $11^2 \times 11^6$. ____________

d) A partir de los ejemplos anteriores, escribe una regla para multiplicar dos potencias de la misma base. ____________

____

____

Compara tus respuestas con las de tus compañeros y lleguen a un acuerdo sobre cuál regla es la correcta. Después analicen la siguiente información y validen la regla que obtuvieron.

El **producto de dos potencias de la misma base** es la base elevada a la suma de los exponentes; es decir, si m y n son dos números enteros mayores o iguales que 1:

$$a^n \times a^m = a^{n+m}$$

Por ejemplo, $5^2 \times 5^3 = 5^{2+3} = 5^5$ y $9^5 \times 9^4 = 9^{5+4} = 9^9$.

Ten en cuenta la diferencia entre -3^2 y $(-3)^2$. En la expresión -3^2, primero se calcula $3^2 = 9$ y luego se agrega el signo menos para obtener $-3^2 = -9$. En la segunda expresión, el exponente se aplica a la base -3: $(-3)^2 = (-3) \times (-3) = 9$.

¿Vamos bien?

Resuelve lo siguiente con base en lo que has aprendido. Al terminar, compara tus procedimientos y tus resultados con los de tus compañeros.

Escribe el resultado de las operaciones como una sola potencia.

a) $(-5)^2 \times (-5)^6 =$ ____________

b) $13^4 \times 13^7 =$ ____________

c) $-3^2 \times 3^5 \times 3^3 =$ ____________

d) $(-2)^2 \times (-2)^3 =$ ____________

e) $15 \times 15^7 =$ ____________

f) $p^3 \times p^4 =$ ____________

g) $a^3 \times a^6 =$ ____________

h) $(-x)^4 \times (-x)^5 =$ ____________

6. Reunidos en parejas, hagan lo que se indica.

a) Desarrollen las expresiones como producto de factores iguales:

$3^5 =$ ______________________ $3^3 =$ ______________________

b) Discutan cómo usar lo que hicieron en el inciso *a* para escribir la siguiente operación como una sola potencia y exprésenla.

$$\frac{3^5}{3^3} = \qquad\qquad\qquad = \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_$$

c) Completen la tabla.

Operación	Desarrollo como producto de factores iguales	Expresado como una potencia	Resultado
$\frac{4^4}{4^2}$			
$\frac{5^6}{5^3}$			

d) Formulen una regla para dividir potencias de la misma base y escríbanla en su cuaderno.

Expongan su regla ante el grupo y lleguen a un acuerdo. Analicen si la siguiente información es consistente con la regla que obtuvieron.

El cociente de dos potencias de la misma base (distinta de cero) es una potencia que tiene esa base y el exponente que se obtiene al restar el exponente del dividendo menos el del divisor. La base debe ser distinta de cero, pues la división entre cero no está definida.

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}, \text{ con } a \neq 0, m \text{ y } n \text{ números enteros positivos}$$

7. Reúnete con un compañero y respondan.

a) ¿A qué es igual $\frac{8}{4}$? ______________ Aplica la regla anterior y calcula: $\frac{2^3}{2^2} =$ ______________ ¿A qué es igual 2^1? ______________ ¿A qué es igual $\frac{25}{5}$? ______________ ¿A qué es igual $\frac{5^2}{5}$? ______________

b) ¿A qué es igual la potencia 1 de cualquier entero *a*? ______________

c) ¿Cuál es el resultado de $7 \div 7$? ______________ ¿Y el de $3 \div 3$? ______________

d) Si *a* es un número que no es cero, ¿cuál es el resultado de $a \div a$? ______________

e) Usando la regla para dividir potencias y tomando en cuenta que $a^1 = a$, ¿cuál debe ser el resultado de $a \div a$ escrito como potencia de *a*? ______________

f) ¿Qué número consideran que se debe asignar a la potencia a^0 para cualquier número *a* distinto de cero? ______________

Comparen sus respuestas con las de sus compañeros y lleguen a un acuerdo sobre las mismas.

8. Reúnete con dos compañeros y hagan lo que se pide.

a) Escriban como producto de factores las potencias del dividendo y del divisor del cociente $\frac{7^3}{7^5}$ y simplifiquen hasta que en el numerador quede un 1.

$$\frac{7^3}{7^5} = \qquad\qquad\qquad = \frac{1}{\quad}$$

b) Determinen la potencia que se obtiene al aplicar la regla de la división de potencias a $\frac{7^3}{7^5}$, por el momento, sin importar que el exponente del denominador sea mayor que el del numerador.

$$\frac{7^3}{7^5} = \_\_\_\_\_\_$$

c) Igualen las expresiones obtenidas en los incisos *a* y *b* y escriban los exponentes que corresponden para completar las igualdades.

$$\frac{7^3}{7^5} = \frac{1}{7^{\square}} = 7^{\square}$$

d) Escriban el desarrollo en factores de las potencias de la división $\frac{n^3}{n^5}$ y simplifiquen lo más posible.

$$\frac{n^3}{n^5} = \qquad\qquad\qquad =$$

e) Escriban la potencia que se obtiene en el inciso anterior aplicando la regla para la división de potencias, sin importar que el exponente del denominador sea mayor que el del numerador.

$$\frac{n^3}{n^5} = \_\_\_\_\_\_$$

f) Igualen los resultados de los incisos *d* y *e*. __________________

g) De acuerdo con los incisos anteriores, escriban el resultado de los siguientes cocientes como potencia de la correspondiente base.

$$\frac{1}{9^5} = \_\_\_\_\_\_ \qquad \frac{1}{n^3} = \_\_\_\_\_\_$$

h) ¿Qué concluyen sobre las potencias con exponente negativo? ______________

____

Comparen su trabajo y su conclusión con sus compañeros y lleguen a un acuerdo acerca de cómo debe entenderse una potencia con exponente negativo. Analicen si su acuerdo es consistente con la siguiente información.

La regla del cociente de potencias de la misma base $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ se cumple para números enteros m y n, cuando $n = m$, cuando $n > m$ y cuando $n < m$. Se establecen, además, las siguientes igualdades:

$$a^1 = a, \qquad \frac{a^n}{a^n} = a^0 = 1 \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{a^n} = \frac{a^0}{a^n} = a^{-n}, \text{ con } a \neq 0$$

¿Vamos bien?

Resuelve con base en lo que has aprendido. Al terminar, compara tus procedimientos y tus resultados con los de tus compañeros.

I. Efectúa las operaciones.

a) $\dfrac{15^{147}}{-15^{126}} =$ ______

b) $\dfrac{(-a)^{2n}}{(-a)^{n}} =$ ______

c) $\dfrac{3^6}{(-3)^5} \times \dfrac{(-3)^4}{3} \times 3 =$ ______

d) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1} =$ ______

II. Ordena las cantidades, de menor a mayor, y escríbelas usando el símbolo "<":

$$-5^0, (-5)^{-3}, -5^3, (-5)^{-2}, -5^{-2}, 5^2, (-5)^0, 5^{-4} \text{ y } 5$$

______

9. Reúnete con un compañero y hagan lo que se pide.

a) Sin realizar multiplicaciones, escriban el desarrollo en factores de $(11 \times 5)^5$, agrupen factores semejantes y, después, igualen el resultado al producto de una potencia de 11 por una potencia de 5.

$(11 \times 5)^5 =$ ______

b) Si a y b son dos números cualesquiera, escriban el desarrollo en factores de $(ab)^7$ y pongan el resultado como producto de potencias de a por potencias de b.

______

c) Escriban una regla para determinar el resultado de la potencia de un producto.

______

______

d) Escriban el desarrollo en factores de $\left(\dfrac{11}{5}\right)^5$ y presenten el resultado como la división de una potencia de 11 entre una potencia de 5.

$\left(\dfrac{11}{5}\right)^5 =$

e) Escriban el desarrollo de $\left(\dfrac{a}{b}\right)^6$ y presenten el resultado como un cociente de potencias de a entre potencias de b.

$\left(\dfrac{a}{b}\right)^6 =$

f) Escriban una regla para determinar el resultado de la potencia de un cociente.

______

______

Comparen las reglas a las que han llegado con la información de la siguiente página.

La **potencia del producto de dos números** es igual al producto de las potencias formadas por cada uno de los números.

$$(ab)^n = a^n b^n \text{, con } n \text{ un número entero}$$

La **potencia formada por un cociente elevado a un exponente** es igual al cociente de las potencias formadas por cada uno de los números elevados al mismo exponente. Se puede representar lo anterior de la siguiente forma:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \text{, con } n \text{ un número entero y } b \neq 0$$

10. Haz lo que se indica.

a) Escribe el desarrollo en factores de $(6^3)^3$ y representa el resultado como una potencia de 6. ____________________

b) Escribe el desarrollo en factores de $(21^4)^2$ y representa el resultado como una potencia de 21. ____________________

c) Ahora escribe el desarrollo de $(a^2)^5$ y escribe el resultado como una potencia de base a. ____________________

____

d) Formula una regla para determinar el resultado de una potencia que tiene como base otra potencia. ____________________

____

Compara la regla a la que llegaste con la de otros estudiantes. Analicen la siguiente información y revisen si su regla es consistente con esta.

www.esant.mx/essema2-007

Al elevar **una potencia a^n a un exponente m**, se obtiene una potencia de base a y un exponente $n \times m = nm$, es decir:

$$(a^n)^m = a^{nm} \text{, para } n \text{ y } m \text{ números enteros}$$

11. Acuerda con un compañero la forma de resolver las operaciones y háganlas.

a) $[(2 + 3)^4 \div 5^2]^2 + (4^3 - 3^2)^3 =$ ____________________

b) $\left[\frac{(3^3 - 4^2)^6}{(11^2)^3}\right] \times \left[\frac{(2^2 \times 3 - 1)}{(5 + 6)^2}\right]^3 =$

Comparen sus procedimientos y sus resultados con los de sus compañeros. Después revisen la información de la siguiente página y, de ser necesario, corrijan.

Cuando aparecen potencias en operaciones combinadas, estas se resuelven aplicando la **jerarquía de las operaciones**. En primer lugar se calculan las potencias, después los productos y las divisiones y, por último, las sumas y restas. Si hay paréntesis, primero se realizan las operaciones internas y, cuando hay paréntesis anidados, se realizan las operaciones de dentro hacia fuera. Por ejemplo:

$$\left[\frac{(4^2-2^2-6)^8}{(6^2)^3}\right]^3=\left[\frac{(16-4-6)^8}{6^6}\right]^3=\left[\frac{6^8}{6^6}\right]^3=[6^2]^3=6^6=46656$$

¿Qué aprendí?

Trabaja los siguientes ejercicios y problemas. Al terminar, revisa tus procedimientos y tus resultados, primero con ayuda de tus compañeros y luego con tu profesor.

1. Subraya los incisos cuyas igualdades son verdaderas.

   a) $\frac{5^3}{15^3}=3^{-3}$

   b) $(3^2)^3\div(3^3)^3=\frac{1}{3^2}$

   c) $\frac{7^{13}}{(7^3\times 7^2)^5}=7^{-12}$

   d) $2^{-1}\times 2^3\times 2^{-2}=1$

2. Haz las operaciones.

   a) $5\times\frac{(4^2-2^3)^5}{[(2\times 4)^2]^4}=$

   b) $\left(\frac{4}{5}\right)^2\times\left(\frac{4}{5}\right)^{-3}+\left(\frac{2^3}{5^2}\right)^2=$

3. En un experimento se agregaron 30 gramos de sal a una sustancia líquida. Cada segundo se midió la cantidad de gramos de sal sin disolver y se concluyó que esta cantidad está dada por la relación $30(0.6)^s$, donde s representa el número de segundos transcurridos.

   Analiza el ejemplo y completa la tabla.

Segundos transcurridos (s)	2	4	6
Cantidad de sal sin disolver (g)	$30(0.6)^2 =$ $30(0.36) = 10.8$		

4. En un laboratorio se estudió la desintegración de una sustancia radiactiva y se determinó que cuando se tienen 500 g de sustancia, la cantidad que queda al paso de los años está dada por la relación $500(0.8)^t$, donde t representa el número de años transcurridos.

   a) ¿Qué cantidad de sustancia queda en tres años? ____________________

   b) ¿Cuántos años tendrán que pasar para que la sustancia se reduzca a menos de 200 g? ____________________

Marca con una ✓ la casilla que describe tu desempeño.

Resuelvo problemas de potencias con exponente entero.		
Nivel de logro	A	Requiero ayuda para realizarlo.
		Lo hago, pero en ocasiones necesito ayuda.
	C	Lo hago de manera autónoma.

Secuencia didáctica

16

Aprendizaje esperado: Resolverás problemas de potencias con exponente entero y aproximarás raíces cuadradas.
Contenido: Usarás la notación científica para realizar cálculos en los que intervienen cantidades muy grandes o muy pequeñas.

Números muy grandes y muy pequeños

1. Analiza la información con un compañero y hagan lo que se pide.

La rapidez de la luz es aproximadamente de 300 000 kilómetros por segundo. Para que te des una idea de la increíble rapidez que representa esto, un avión que vuela en promedio a 800 kilómetros por hora, se tardaría alrededor de dos días en dar una vuelta a la Tierra. ¡En cambio la luz le da siete vueltas en un segundo!
Para las inmensas distancias que existen en el Universo se usan unidades de medida especiales, puesto que se requieren números muy grandes. Una de estas son los años luz. Un año luz es una unidad de distancia y equivale a la cantidad de kilómetros que, en el vacío, recorre la luz en un año.

a) Escriban la potencia de 10 que debe ir en la igualdad $300000 = 3 \times 10^{\square}$.

b) Considerando que la luz le da siete vueltas a la Tierra en un segundo y que conocen su rapidez por segundo, calculen la longitud recorrida en una vuelta a nuestro planeta. Redondeen la respuesta a un entero con cinco cifras.

___ ___ ___ ___ ___

c) Escriban la respuesta anterior como un entero con cuatro cifras decimales multiplicado por una potencia de 10.

___ ___ ___ ___ ___ = ___ ___ ___ ___ ___ $\times 10^{\square}$

d) ¿Cuántos segundos hay en una hora? ________ ¿Y en un día? ________

¿Y en un año? ________________

e) Escriban la cantidad de segundos que hay en un año como un número decimal con una cifra entera, multiplicado por una potencia de 10. ________

Comparen sus respuestas con las de sus compañeros.

2. Haz lo que se solicita.

a) Analiza el ejemplo y completa la tabla.

	$\times 10$	$\times 10^2$	$\times 10^3$	$\times 10^4$	$\times 10^5$
0.0035	0.035	0.35	3.5	35	350
0.00027					
0.012					
0.58					
8.4					
9.6					
250.32					

b) Escribe la potencia de 10 que corresponde en cada caso.

$45000000000 = 4.5 \times$ ______ $1120300000000000 = 1.1203 \times$ ______

c) Los números del inciso anterior ¿son grandes o pequeños? ______

d) ¿Qué consideras que es más práctico: escribir el número con todas sus cifras o anotarlo como un producto? ______

e) Cuando se multiplica un número decimal por una potencia de 10 con exponente positivo, ¿el punto decimal se recorre hacia la izquierda o hacia la derecha? ______ Si el exponente es 8, ¿cuántas cifras se recorre el punto decimal? ______ ¿Qué relación hay entre el exponente de 10 y el número de cifras que se recorre el punto decimal? ______

______

f) Analiza los ejemplos y completa la tabla.

	$\times 10^{-1}$	$\times 10^{-2}$	$\times 10^{-3}$	$\times 10^{-4}$	$\times 10^{-5}$
350	35	3.5	0.35	0.035	0.0035
84.52	8.452				
8.452					
7.36					
0.258					

g) Escribe la potencia de 10 que corresponde en cada caso.

$7.935 \times$ ______ $= 0.000007935$ $6.075 \times$ ______ $= 0.00000000006075$

h) Los números del inciso anterior ¿son grandes o pequeños? ______

______

i) ¿Cuántas cifras se recorre el punto decimal al multiplicar por 10^{-6}? ______ ¿Hacia dónde se recorrió el punto? ______ ¿Qué relación hay entre el exponente de 10 y el número de cifras que se recorre el punto decimal? ______

______

j) ¿Cuántas cifras se recorre el punto decimal al multiplicar por 10^{-11}? ______ ¿Hacia dónde se recorrió el punto? ______ ¿Qué relación hay entre el exponente de 10 y el número de cifras que se recorre el punto decimal?

______

______

Compara tu trabajo con el de tus compañeros. Reflexionen, discutan y lleguen a un acuerdo sobre el procedimiento para escribir en forma abreviada números muy grandes y números muy pequeños. Comparen su acuerdo con la información de la siguiente página.

Para escribir números muy grandes o muy pequeños en forma abreviada, se usa la notación científica. Un número escrito en notación científica es de la forma $a \times 10^k$, donde k es un entero y a es un número decimal mayor o igual que 1 y menor que 10.

Escribir un número en notación científica es escribirlo como un número decimal con una sola cifra entera y multiplicarlo por una potencia de 10 con exponente igual al número de cifras que se debe recorrer el punto decimal, para que el producto dé como resultado el número original.

Si el número es muy grande, por ejemplo 235000000, entonces:

1. Se coloca el punto decimal para que quede con una sola cifra entera: 2.
2. Se cuentan las cifras a la derecha del punto: 8 cifras
3. Se eliminan los ceros a la derecha de la última cifra decimal distinta de cero: 2.
4. Se multiplica el número anterior por la potencia de 10 con exponente igual al número obtenido en el segundo paso, el cual es el número de cifras que debe recorrerse el punto a la derecha para obtener el número original:

$$2.35 \times 10 = 2$$

www.esant.mx/essema2-008

Si el número es muy pequeño, por ejemplo 0.000000000009301, entonces:

1. Se coloca el punto decimal para que quede con una sola cifra entera: 0.301
2. Se cuentan las cifras que se debe recorrer el punto decimal del número anterior, para obtener el original: 12 cifras
3. Se eliminan los ceros a la izquierda de la cifra entera: .301
4. Se multiplica el número anterior por la potencia de 10 con exponente igual al número obtenido en el segundo paso, pero antecedido del signo menos (−), pues ahora el punto se debe recorrer a la izquierda para que el producto sea igual al número original:

$$9.301 \times 10 = 0.\;301$$

¿Vamos bien?

Realiza lo siguiente con base en lo que has aprendido. Al terminar, compara tus procedimientos y tus resultados con los de tus compañeros.

1. ¿Qué números no están escritos en notación científica? Explica por qué.

   a) 0.325×10^{14} b) 8.15×10^{20} c) 9.25×10^{-25} d) 10.8×10^{-17}

2. Escribe los números en notación científica.

   a) 0.000000000000584 b) 8 975 000 000 000 000 000

3. Realicen en parejas lo que se pide.

a) Hagan las operaciones.

$x = 6.3251 \times 10^2 =$ ______________ $y = 4.524 \times 10^2 =$ ______________

$x + y =$ ______________, en notación científica: $x + y =$ ______________

$6.3251 + 4.524 =$ ___________, multipliquen el resultado por 10^2: ___________,

escriban el resultado en notación científica: ______________

b) ¿Hay alguna relación entre lo que hicieron en las primeras dos líneas del inciso *a* con lo realizado en las últimas dos líneas de ese inciso? ________ ¿A qué se debe? ______________

c) Escriban las sumas como un producto con un factor igual a la potencia de 10. Después hagan la suma y escriban el resultado en notación científica.

$3.5 \times 10^8 + 2.4 \times 10^8 = ($ ______ $+$ ______ $) \times 10^8 =$ ______________

$1.7 \times 10^{12} + 6.2 \times 10^{12} = ($ ______ $+$ ______ $) \times$ ______ $=$ ______________

d) Reflexionen, discutan y lleguen a un acuerdo sobre el procedimiento que se debe seguir para sumar dos números escritos en notación científica cuando la potencia de 10 tiene el mismo exponente en los dos números. Redacten su acuerdo.

____

____

____

Comparen sus respuestas con las de sus compañeros y revisen si todos llegaron al mismo acuerdo. Si hay procedimientos distintos, analicen si son equivalentes y por qué.

4. Realicen en equipos lo que se pide.

a) Escriban los exponentes correctos para que se cumplan las igualdades.

- $10^{\square} = 10^{-2} \times 10^4$
- $10^3 = 10^{\square} \times 10^4$
- $10^3 = 10^{\square} \times 10^5$
- $10^5 = 10^{\square} \times 10^8$
- $3.87 \times 10^3 = (3.87 \times 10^{\square}) \times 10^5$
- $5.124 \times 10^5 = (5.124 \times 10^{\square}) \times 10^8$

b) Completen la suma. Desarrollen primero las operaciones dentro de los paréntesis, y escriban el resultado final en notación científica.

$3.27 \times 10^2 + 4.727 \times 10^4 = [(3.27 \times 10^{\square}) + 4.727] \times 10^4$

$= [$ ________ $+ 4.727] \times 10^4 =$ ______________

c) Desarrollen primero los productos por las potencias de 10, y después hagan la suma. Escriban el resultado final en notación científica.

$3.27 \times 10^2 + 4.727 \times 10^4 =$ ______________________

Si no obtuvieron el mismo resultado que en el inciso *b*, revisen sus operaciones, ubiquen el error y corrijan.

Convivo en armonía

d) Realicen las operaciones.

$2.16 \times 10^{3} + 6.54 \times 10^{4} =$ ____________________

$5.124 \times 10^{8} - 9.53 \times 10^{6} =$ ____________________

e) Realicen las operaciones, empezando por las indicadas dentro de los paréntesis. Escriban el resultado final en notación científica.

$(2.5 \times 10^{2}) \times (1.3 \times 10^{3}) =$ ____________________

$(2.5 \times 1.3) \times (10^{2} \times 10^{3}) =$ ____________________

$(2.4 \times 10^{4}) \div (1.5 \times 10^{2}) =$ ____________________

$(2.4 \div 1.5) \times (10^{4} \div 10^{2}) =$ ____________________

f) ¿Qué observan en los resultados en las operaciones de las primeras dos líneas del inciso anterior? ____________________

¿Y en los de las últimas dos líneas? ____________________

g) Realicen las siguientes operaciones.

$(8.3 \times 10^{8}) \times (2.4 \times 10^{12}) =$ ____________________

$(5.2 \times 10^{6}) \times (3.5 \times 10^{7}) =$ ____________________

$(7.4 \times 10^{22}) \div (2.5 \times 10^{15}) =$ ____________________

$(3.2 \times 10^{15}) \div (1.5 \times 10^{20}) =$ ____________________

Comparen sus resultados con los de sus compañeros. Revisen los procedimientos que emplearon en los incisos *d*, *e*, *f* y *g*. Discutan y lleguen a un acuerdo sobre las siguientes preguntas: ¿hubo procedimientos distintos? ¿Cuál consideran más práctico? ¿Cómo suman, restan, multiplican y dividen números en notación científica?

Para sumar o restar dos números en notación científica...

- si los exponentes de las potencias de 10 son iguales, se escribe la suma como un producto con un factor igual a la potencia común de 10.
- si los exponentes son distintos, se escribe la suma como un producto con un factor igual a la potencia de 10 de mayor exponente.

En los dos casos, el resultado final se escribe en notación científica.

Para multiplicar o dividir dos números en notación científica, se multiplican o dividen los números que preceden las potencias, y también se multiplican o dividen las potencias de 10. El resultado se escribe en notación científica.
Ejemplos:

- $8.5 \times 10^{15} + 3.4 \times 10^{18} = (8.5 \times 10^{-3} + 3.4) \times 10^{18} = (0.0085 + 3.4) \times 10^{18} = 3.4085 \times 10^{18}$
- $(9.2 \times 10^{8}) \times (3.2 \times 10^{-2}) = (9.2 \times 3.2)(10^{8} \times 10^{-2}) = 29.44 \times 10^{6} = 2.944 \times 10^{7}$
- $(9.2 \times 10^{8}) \div (3.2 \times 10^{-2}) = (9.2 \div 3.2)(10^{8} \div 10^{-2}) = 2.875 \times 10^{10}$

¿Vamos bien?

Resuelve lo siguiente con base en lo que has aprendido. Al terminar, compara tus resultados y tus procedimientos con los de tus compañeros.

Realiza las operaciones.

a) $2.5 \times 10^{-12} + 3.7 \times 10^{-12} =$ ______

b) $(1.8 \times 10^{12}) \times (6.3 \times 10^{32}) =$ ______

c) $(6.4 \times 10^{11}) \div (6.2 \times 10^{8}) =$ ______

5. Calcula cuántos kilómetros mide un año luz.

   Considera que la rapidez de la luz es de 300 000 kilómetros por segundo, que un año luz equivale a la cantidad de kilómetros que, en el vacío, recorre la luz en un año, y que la rapidez es la distancia entre el tiempo. En la actividad inicial calculaste la cantidad de segundos que hay en un año.

   ______

- Expón tu procedimiento y tus resultados ante la clase. Escucha y analiza lo que hicieron tus compañeros. En grupo, discutan si todos usaron notación científica al realizar las operaciones o no; qué consideran que es más práctico y por qué.

¿Qué aprendí?

Resuelve los problemas. Al terminar, revisa tus procedimientos y tus resultados, primero con ayuda de tus compañeros y luego con tu profesor.

1. Nuestra galaxia, donde está el sistema solar, es la Vía Láctea, que tiene 150 000 años luz de diámetro. Comparativamente, nuestro planeta es un pequeño e insignificante punto perdido en la galaxia. ¿Cuánto mide el diámetro de la Vía Láctea en kilómetros?

   ______

2. La masa de un electrón es aproximadamente:

$$0.000000000000000000000000000000911 \text{ kg}$$

   a) Escribe este número con notación científica. ______

   b) Se sabe que un neutrón tiene una masa que es casi 1 838 veces mayor que la de un electrón. Usen esta información y encuentren el valor aproximado de la masa de un neutrón.

   ______

Marca con una ✓ la casilla que describe tu desempeño.

Uso la notación científica para realizar cálculos en los que intervienen cantidades muy grandes o muy pequeñas.

Nivel de logro		
	A	Requiero ayuda para realizarlo.
	B	Lo hago, pero en ocasiones necesito ayuda.
	C	Lo hago de manera autónoma.

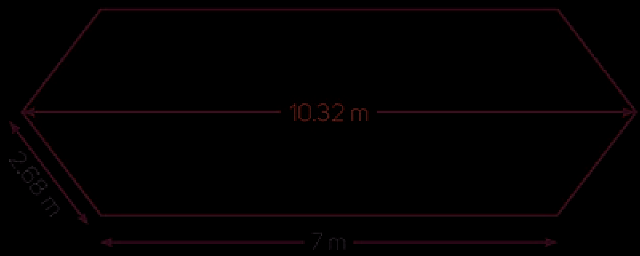
Secuencia didáctica 17

Aprendizaje esperado: Calcularás el perímetro y área de polígonos regulares y del círculo a partir de diferentes datos.
Contenido: Calcularás el perímetro y el área de polígonos regulares y del círculo a partir de diferentes datos.

Los polígonos y el círculo

1. Reúnete con un compañero, lean la información y hagan lo que se pide.

A don Manuel le pidieron colocar mosaico en el piso de una fuente como la de la imagen. Para hacer el presupuesto, necesita calcular cuántos metros cuadrados de mosaico debe comprar, pero no se le ocurre cómo hacerlo.



Federico, uno de sus hijos, le propuso que dividiera la superficie en figuras cuyas áreas fueran más fáciles de calcular.

a) ¿Piensan que es adecuada la recomendación de Federico? ____________

En caso afirmativo, sobre la imagen de la fuente tracen las líneas que consideren necesarias para dividirla.

b) ¿En cuántas piezas quedó dividida su figura? ____________

c) ¿Cómo se calcula el área de las figuras que encontraron? ____________

____

d) ¿Qué otros datos necesitan para calcular el área de esas figuras? ____________

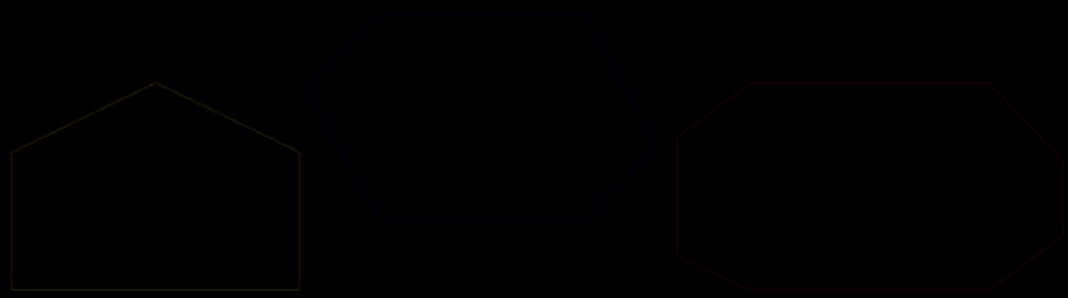
____

e) Si el ancho de la fuente mide 4.21 m, ¿cuántos metros cuadrados de mosaico necesita comprar don Manuel? ____________

Discutan sus respuestas y sus procedimientos con el resto del grupo, y si hubo diferentes maneras de dividir la figura, anótenlas en sus cuadernos.

2. Reúnete con un compañero y hagan lo que se solicita.

a) En sus cuadernos hagan dos copias de los polígonos. Tomen las medidas que consideren necesarias.



b) En una de las copias tracen líneas que dividan a los polígonos en triángulos y cuadriláteros.

c) En la otra copia, elijan uno de los vértices de cada polígono y tracen diagonales que lo dividan en triángulos.

d) ¿Es posible calcular el área de los polígonos con estos procedimientos? ________

En caso afirmativo, calculen el área de los 3 polígonos. ________

____

____

e) ¿Consideran que de este modo se puede calcular el área de cualquier polígono? Expliquen su respuesta. ________

____

Discutan sus argumentos con el resto del grupo.

3. Reúnete con dos compañeros, analicen las figuras y respondan.

En la imagen se muestran cuatro copias de un hexágono regular con lado de *b* unidades de longitud; cada uno ha sido dividido en triángulos, de diferentes maneras.

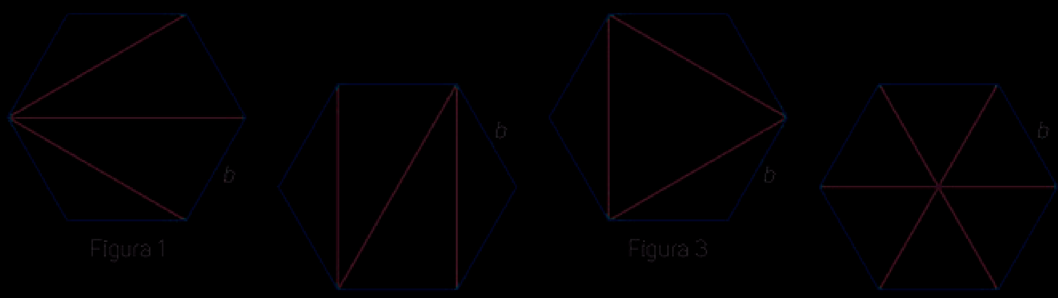


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

a) ¿Qué datos necesitan conocer en cada caso para calcular el área del hexágono?

Figura 1: ________

____

Figura 2: ________

____

Figura 3: ________

____

Figura 4: ________

____

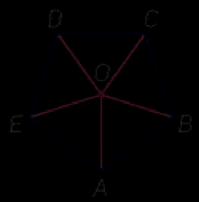
b) ¿Con cuál triangulación piensan que es más fácil calcular el área del hexágono? Expliquen su respuesta. ________

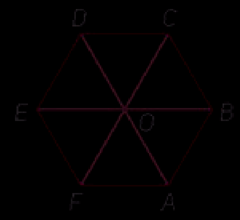
____

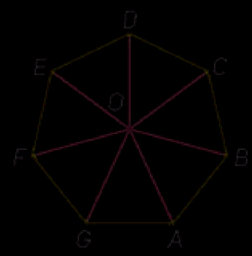
Discutan sus argumentos con el resto del grupo.

4. Reúnete con dos compañeros, analicen las figuras y hagan lo que se pide.

Los siguientes polígonos regulares tienen lados de *b* unidades de longitud.







a) Escriban los datos faltantes en la tabla.

Glosario

ángulo central de un polígono.

Polígono regular	Número de lados del polígono	Número de triángulos en que está dividido	Medida del ángulo central del polígono
Pentágono			
Hexágono			
Heptágono			

b) En cada polígono tracen una circunferencia con centro en *O* y que pase por uno de los vértices. ¿Los demás vértices del polígono están sobre la circunferencia? __________ ¿Qué pueden decir sobre las longitudes de los segmentos *OA*, *OB*, *OC*, etcétera? __________

c) ¿Son congruentes los triángulos en los que está dividido cada polígono? __________ ¿Cuál criterio de congruencia utilizaron para responder? __________

d) ¿Qué dato les hace falta para calcular el área de cada triángulo? __________

e) Si *c* unidades es la medida de la altura de cada triángulo en el pentágono, ¿cuál expresión algebraica representa el área del pentágono? __________

f) Escriban una expresión algebraica para el área del hexágono considerando que la altura de cada triángulo mide *d* unidades. __________

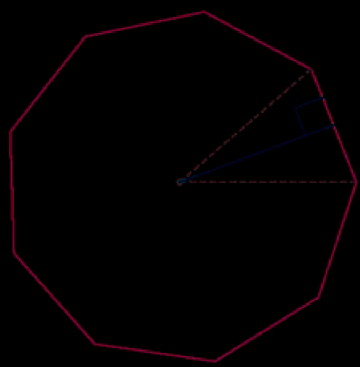
g) Hagan lo mismo para el heptágono considerando que la altura de los triángulos mide *h* unidades. __________

h) ¿Consideran que este procedimiento puede aplicarse a cualquier polígono regular? __________

Discutan sus respuestas con el resto del grupo y lleguen a un acuerdo sobre cómo pueden encontrar el área de un polígono regular. Comparen su acuerdo con la información de la siguiente página.

El segmento perpendicular que une el centro de un polígono regular con un lado se llama **apotema**.

Observa que la apotema es precisamente la altura de los triángulos en que se divide al polígono uniendo el centro con los vértices.



Como el área de un polígono regular de n lados es igual a la suma de las áreas de los n triángulos en que se divide desde el centro, si el lado del polígono regular mide b unidades y la apotema mide a unidades, entonces:

$$\text{Área} = n\left(\frac{ba}{2}\right) = \frac{nba}{2}$$

Y como el perímetro del polígono es precisamente nb (n veces la longitud del lado), entonces:

$$\text{Área de un polígono regular de } n \text{ lados} = nb\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{\text{Perímetro} \times \text{apotema}}{2}$$

www.esant.mx/essema2-009

¿Vamos bien?

Resuelve lo siguiente con base en lo que has aprendido. Al terminar, compara tus procedimientos y tus resultados con los de tus compañeros.

Calcula el área de los polígonos.

a) Un octágono regular con lado de 3 cm de longitud y apotema de 3.62 cm

b) Un heptágono regular con lado de 4 cm de longitud y apotema de 4.15 cm

c) Un polígono regular de 12 lados con perímetro de 24 cm y apotema de 3.73 cm

Glosario

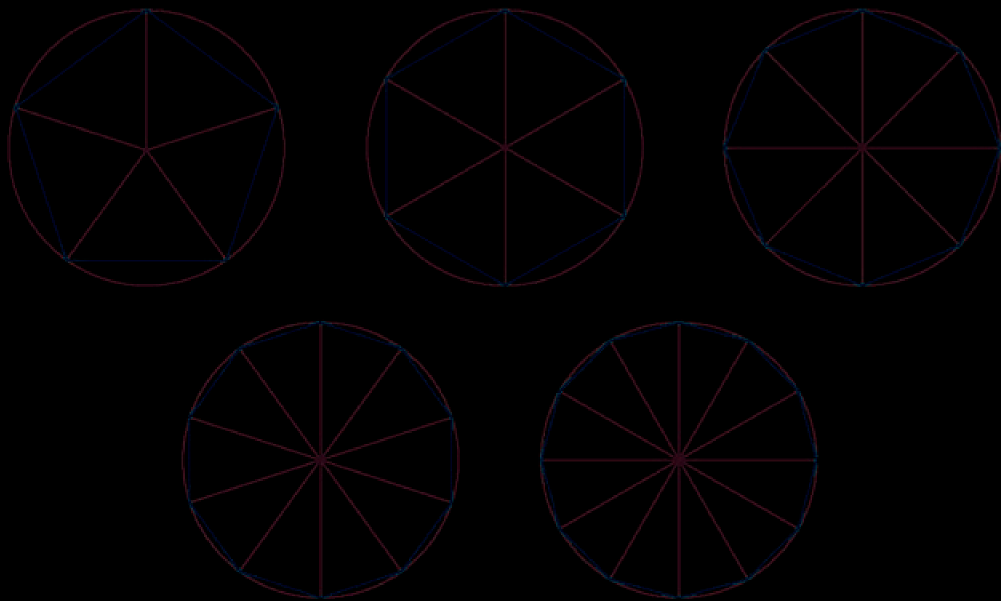
polígono inscrito en una circunferencia

5. Reúnete con dos compañeros y hagan lo que se pide.

a) En sus cuadernos, tracen cinco circunferencias de 5 cm de radio.

b) ¿Qué ángulo deben formar los radios para inscribir en la circunferencia un polígono regular de cinco lados? ______ ¿Y para inscribir un hexágono regular? ______ ¿Qué ángulo deben formar los radios para inscribir en la circunferencia un octágono regular? ______ ¿Y si el polígono regular tiene 10 lados? ______ ¿Y si debe tener 12 lados? ______

c) Construyan los cinco polígonos regulares inscritos en las circunferencias.



d) ¿Qué sucede con la longitud del lado de los polígonos inscritos cuando aumenta el número de lados? ______

e) Si se inscribiera un polígono regular de 50 lados, ¿notarían alguna diferencia entre el perímetro del polígono y el perímetro de la circunferencia? ______

f) Si aumenta el número de lados del polígono regular inscrito, ¿la longitud de la apotema aumenta o disminuye? ______ ¿Habrá mucha diferencia con el radio de la circunferencia? ______

g) ¿Habrá mucha diferencia entre el área de un polígono inscrito de 100 lados y el área del círculo? ______ ¿Y si el polígono regular tuviera 100 000 lados? ______

h) ¿Cómo calcularían el área de un círculo? ______

______

Discutan sus propuestas con el resto del grupo y lleguen a un acuerdo. Después comparen su acuerdo con la información de la siguiente página.

Área del círculo

El área de un círculo de radio r se obtiene multiplicando el perímetro del círculo por la longitud del radio y dividiendo el resultado entre 2.

$$\text{Área del círculo} = \frac{\text{Perímetro} \times \text{radio}}{2}$$

Como el perímetro de la circunferencia es $\pi \times$ diámetro o bien $\pi \times 2r$, entonces

$$\text{Área del círculo} = \frac{\pi \times 2r \times r}{2} = \pi r^2$$

¿Vamos bien?

Resuelve lo siguiente con base en lo que has aprendido. Al terminar, compara tus procedimientos y tus resultados con los de tus compañeros.

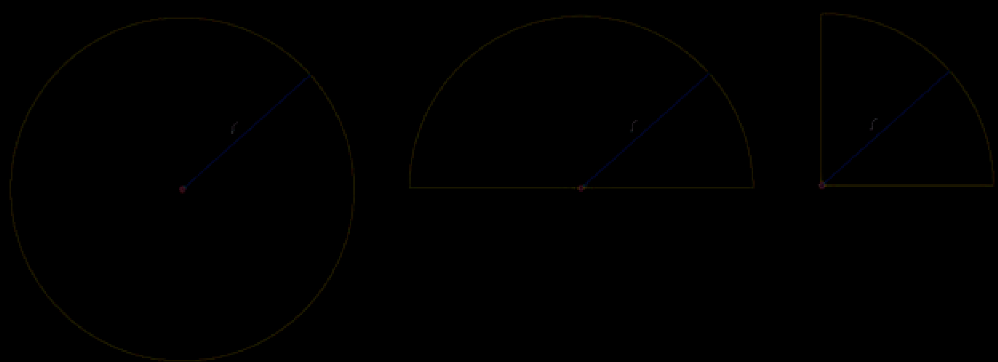
I. Calcula el área usando 3.14 como aproximación al valor de π.

a) Un círculo de 6 cm de radio ____________________

b) Un círculo de 4 cm de diámetro ____________________

II. Si el área de un círculo mide 3.14 cm², ¿cuánto mide su diámetro? __________

6. Analiza las figuras y responde.



a) Si $r = 3$ cm, ¿cuánto mide el área del círculo? Usa 3.14 como aproximación al valor de π. ____________________

b) ¿Cuánto medirá el área del semicírculo? ____________________
¿Y la del cuarto de círculo? ____________________

c) Escribe una expresión algebraica para representar el área del semicírculo y del cuarto de círculo para cualquier valor de r. ____________________

____

d) Escribe una expresión algebraica para representar el perímetro del semicírculo y del cuarto de círculo para cualquier valor de *r*. ______________________

____

Compara tus respuestas con las de tus compañeros, y si detectas algún error, corrígelo.

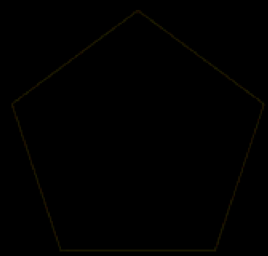
Aplico

¿Qué aprendí?

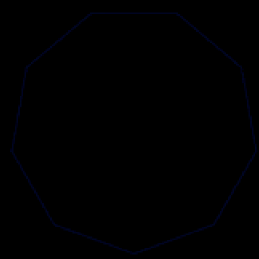
Trabaja los siguientes ejercicios y problemas. Al terminar, revisa tus procedimientos y resultados, primero con ayuda de tus compañeros y luego con tu profesor.

www.esant.mx/essema2-010

1. Analiza las figuras y responde.



Perímetro = 15. 62 cm



Perímetro = 16. 85 cm

a) Si la apotema del pentágono mide 2.15 cm, ¿cuánto mide su área?

____

b) Si el área del polígono de 9 lados mide 21.68 cm^2, ¿cuánto mide su apotema?

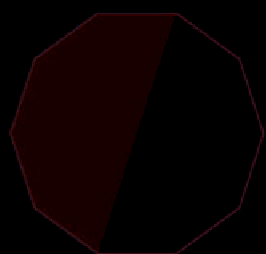
____

2. El área de un octágono regular mide 55.59 cm^2. Si su apotema mide 4.1 cm, ¿cuánto mide el lado del octágono?

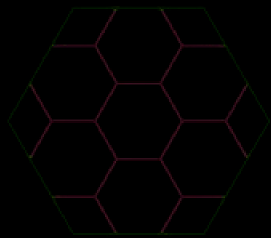
____

3. Calcula el perímetro de la región azul, sabiendo que el perímetro del decágono regular mide 19.8 cm y el radio de la circunferencia en la que se encuentra inscrito mide 3.2 cm.

____

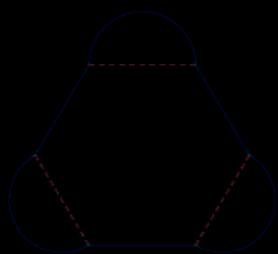


4. ¿Cuál es el perímetro del hexágono exterior si el lado de los hexágonos interiores mide 3 cm? ____________________



5. Calcula el área y el perímetro de la figura, sabiendo que el lado del hexágono regular mide 2.68 cm y la apotema mide 2.32 cm.

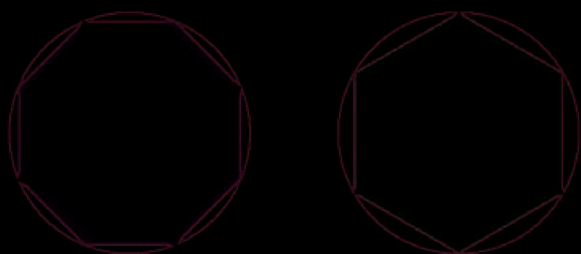
____



6. Calcula el área de las regiones coloreadas.

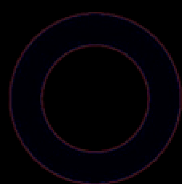
a) El lado del cuadrado mide 4.57 cm. El lado del octágono mide 2.47 cm y su apotema mide 2.99 cm. ____________________

b) El lado del triángulo mide 5.6 cm y su altura mide 4.85 cm. El lado del hexágono mide 3.23 cm y su apotema mide 2.8 cm. ____________________

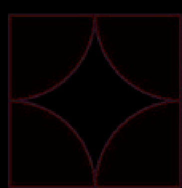


7. Si el radio del círculo interior mide 2.5 cm y el radio del círculo exterior mide 4 cm, ¿cuánto mide el área de la región coloreada?

____



8. Calcula el área de la región azul. Considera que el lado del cuadrado mide 4 cm. ____________________



Marca con una ✓ la casilla que describe tu desempeño.

Contenido	
Calculo el perímetro y el área de polígonos regulares y del círculo a partir de diferentes datos.	
Nivel de logro	A Requiero ayuda para realizarlo.
	B Lo hago, pero en ocasiones necesito ayuda.
	C Lo hago de manera autónoma.

Un alto en la espiral

Resuelve los problemas. Con base en tus resultados, y con ayuda de tu profesor, identifica las secuencias correspondientes a los contenidos que debes repasar.

1. Calcula las raíces.

   a) $\sqrt{81}$ = ____________ c) $\sqrt{400}$ = ____________

   b) $\sqrt{100}$ = ____________ d) $\sqrt{25}$ = ____________

2. Escribe entre qué números enteros consecutivos se encuentra la raíz indicada.

   a) $\sqrt{20}$ ____________

   b) $\sqrt{55}$ ____________

   c) $\sqrt{96}$ ____________

3. Aplica algún método para aproximar $\sqrt{15}$ con una cifra decimal.

4. Determina el valor de x para que se cumpla cada igualdad.

   a) $3^{4x-20} = 1$ ____________

   b) $5^{6-2x} = \frac{1}{25}$ ____________

   c) $2^{x+5} = 2^{-3}$ ____________

5. Realiza las operaciones.

   a) $\frac{7^{13}}{(7^3 \times 7^2)^5} =$ ____________

   b) $\left(\frac{x^5}{x^8}\right)^3 \times \left(\frac{x^4}{x^2}\right)^{-2} =$ ____________

   c) $(a^3)^5 \times \left(\frac{a^4}{a^9}\right) =$ ____________

6. Escribe en notación científica los números.

   a) 0.00000000000000025 = ____________

   b) 4560000000000000000000 = ____________

7. Realiza las operaciones y escribe el resultado en notación científica.

   a) $5.3 \times 10^{-12} + 2.8 \times 10^{-12} =$ ____________

   b) $(2.1 \times 10^{8}) \times (4.2 \times 10^{-2}) =$ ____________

8. El piso de una habitación es cuadrado, tiene 144 mosaicos cuadrados y cada mosaico mide 30 cm de lado. ¿Cuánto mide la longitud de cada lado de la habitación?

____

9. La unidad de medida para almacenar información en una computadora es el bit. Un bit almacena solo datos representados por un 0 o un 1 en una posición. Para representar mayor capacidad de almacenamiento se usa el *byte* (se pronuncia *bait* porque es una palabra inglesa); un *byte* está formado por ocho bits. Un *kilobyte* (Kb) está formado por 2^{10} *bytes*; y un megabyte (Mb) está formado por 2^{10} Kb.

¿Cuántos Kb hay en 2 Mb? ______________________________

10. Algunos virus de computadoras son pequeños programas que se reproducen solos. Un tipo de estos virus reproduce cuatro copias del mismo programa en un segundo y se apaga; cada una de las cuatro copias se reproduce en un segundo haciendo cuatro copias más, y los reproductores se apagan, y así sucesivamente, cada nuevo programa reproduce cuatro copias más. En algún momento, si no se les detecta, saturan la memoria de la computadora provocando que deje de funcionar.

Considera que una máquina está infectada por este virus y responde.

a) ¿Cuántas copias tendrá del virus en cinco segundos? ______________________________

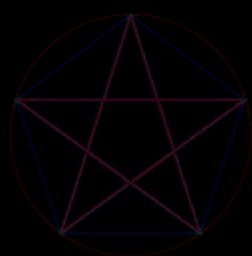
b) Si el virus ocupa 2 Kb de memoria de una computadora, y la capacidad de memoria de la máquina es de 2 Mb, ¿en cuántos segundos se saturará la memoria de la computadora?

____

11. Una vacuna tiene 80 millones de bacterias por centímetro cúbico. Si una dosis es de 0.04 cm^3, ¿cuántas bacterias hay en una dosis? Usa notación científica para dar tu respuesta.

____

12. Lidia construirá un logotipo como el de la figura para colocarlo en una de las mangas de las playeras de su equipo de futbol. Usará dos capas de tela, una blanca para el círculo y una amarilla para el pentágono. Sobre ellas pegará una estrella de lámina verde. El contorno del círculo y del pentágono estarán cubiertos con estambre azul y rojo, respectivamente. Cada lado del pentágono mide 1.2 cm, su apotema 0.8 cm y el radio del círculo mide 1 cm. Realiza los cálculos que se indican para ayudar a Lidia a determinar la cantidad de tela y estambre que necesita para cada logotipo.



a) Perímetro del pentágono: ______________________________

b) Área del pentágono: ______________________________

c) Área del círculo: ______________________________

d) Perímetro del círculo: ______________________________

Reflexiona sobre tus resultados y, con tu profesor, busca estrategias para fortalecer tus áreas de oportunidad.

En la columna "Nota", marca una ✓ en los reactivos que resolviste correctamente.

1		13	106-113
2		13	106-113
3		14	114-121
4		15	122-129
5		15	122-129
6		16	130-135
7		16	130-135
8		13	106-113
9		15	122-129
10		15	122-129
11		16	130-135
12		17	136-143

Secuencia didáctica
18

Aprendizaje esperado: Resolverás problemas mediante la formulación y solución algebraica de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.
Contenido: Plantearás sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

De dos por dos

1. Reúnete con un compañero y hagan lo que se pide.

   a) La cancha de futbol de la escuela de Jaime tiene un perímetro de 352 m. ¿Pueden saber cuáles son las dimensiones de la cancha? ______
   Expliquen su respuesta. ______

   ______

   b) Escriban los datos faltantes en la tabla.

Si el largo de la cancha mide...	el ancho de la cancha mide...	y el perímetro es
102 m		352 m
100 m		352 m
	70 m	352 m
110 m		352 m
	64 m	352 m
	75 m	352 m

   c) Si supieran que el ancho de la cancha mide la mitad del largo, ¿podrían determinar las dimensiones? ______ En caso afirmativo, ¿qué procedimiento seguirían para determinar las longitudes? ______

   ______

   ¿Cuáles serían las dimensiones? ______

   d) Ahora supongan que el largo es 10 m mayor que el ancho, ¿podrían encontrar las dimensiones de la cancha? ______ ¿Cómo lo harían? ______

   ______

   ______

   ¿Cuáles serían las dimensiones en este caso? ______

Comparen sus respuestas y procedimientos con los de sus demás compañeros, y si detectan errores, corríjanlos.

2. Reúnete con dos compañeros y hagan lo que se solicita.

   a) Leti y Emiliano son hermanos y tienen menos de ocho años. ¿Cuáles son sus posibles edades? (Si alguno es menor de un año, considérenlo como cero.)

   ______

b) Si se sabe que la suma de sus edades es igual a 10, ¿alguno de ellos podría tener menos de un año? ______

c) Escriban una ecuación que represente el hecho de que la suma de sus edades es 10. ______

d) ¿Cuáles podrían ser las edades de Leti y Emiliano? ______

e) ¿La ecuación que formularon tiene una única solución? ______

f) Si se sabe que Leti tiene cuatro años más que Emiliano, ¿cómo representarían esta situación? ______

g) ¿Cuáles son las edades de Leti y Emiliano? ______

Convivo en armonía

- Discutan sus respuestas y procedimientos con el resto del grupo.

3. Reúnete con un compañero y hagan lo que se pide.

El otro día Pamela compró un paquete de plumas y un paquete de lápices por los que pagó \$36. Ayer Jessica compró dos paquetes de plumas en la misma papelería y pagó \$46.

a) Escriban una ecuación que represente la compra que hizo Pamela y una ecuación que represente la compra que hizo Jessica: ______ y ______

b) ¿Cuánto costó el paquete de plumas? ______ ¿Cómo obtuvieron la respuesta? ______

c) ¿Pueden usar esta información para saber cuánto costó el paquete de lápices? ______ En caso afirmativo, encuentren el costo. ______ Expliquen cómo obtuvieron la respuesta. ______

- Comparen sus respuestas y procedimientos con los de sus compañeros, y si detectan errores, corríjanlos.

4. Escribe en cada caso las ecuaciones que representan la situación.

a) La suma de dos números es 27. ¿Cuáles son los números? ______

b) El perímetro de un rectángulo mide 10 cm y el largo mide la mitad del ancho. ¿Cuáles son sus dimensiones? ______

c) La diferencia entre dos números es 4 y uno de ellos es el doble del otro. ¿Cuáles son los números? ______________________

d) Mi hermana es dos años mayor que yo. ¿Qué edad tiene mi hermana?

____

e) ¿En cuáles casos tienes suficiente información para encontrar la respuesta?

____

- Discute tus respuestas con el resto del grupo. Después analicen la siguiente información.

Un **sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas** es una pareja de ecuaciones de la forma:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

donde a, b, c, d, e y f son constantes, mientras que x y y son incógnitas.

Los siguientes son ejemplos de sistemas de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x = 5 + 3y \\ 5y = 1 + 4x \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 3y - 10 \\ 3x = 2 + 5y \end{cases}$$

Se coloca una llave o corchete a la izquierda de las ecuaciones para resaltar el hecho de que no son ecuaciones independientes, sino un sistema de ecuaciones.

La pareja de números x y y es **solución del sistema de ecuaciones** si dicha pareja es solución de cada una de las ecuaciones del sistema. Así, la pareja de números $x = 4$ y $y = 3$ es solución del primer sistema de ecuaciones puesto que:

$$4 + 3 = 7$$
$$4 - 3 = 1$$

¿Vamos bien?

Aplica lo que has aprendido para resolver lo siguiente. Al terminar, compara tus procedimientos y los resultados que obtuviste con los de tus compañeros.

Verifica que la pareja de números $x = 2$ y $y = -4$ es solución de cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones.

a) $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x - y = 6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - 2y = 14 \\ -5x + y = -14 \end{cases}$ c) $\begin{cases} -x - 5y = 18 \\ -3x - 9y = 30 \end{cases}$

5. Reúnete con un compañero y, después de leer el texto, respondan.

Esther, que está aprendiendo a resolver ecuaciones, se encontró con el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + y = 11 \\ 2x - y = 12 \end{cases}$$

Entusiasmada por aplicar sus conocimientos, decidió resolverlo de la siguiente manera: Si $x = 7$, entonces $y = 4$, y como $2x = 14$, entonces $y = 2$.

Expliquen por qué el procedimiento de Esther no es correcto.

- Discutan su respuesta con el resto del grupo y lleguen a un acuerdo sobre cómo deben ser las soluciones de un sistema de ecuaciones.

6. Lee el texto y sigue las instrucciones.

Elsa tiene 27 años más que su hijo Raúl y dentro de 12 años tendrá el doble de la edad de Raúl.

a) Para determinar la edad de Elsa y la de Raúl escribe en tu cuaderno los datos faltantes en una tabla como la siguiente. Agrega los renglones que hagan falta.

Si Elsa tuviera actualmente	Raúl tendría actualmente	Dentro de 12 años Elsa tendría	Raúl tendría
27	0		
28	1		
29			
30			
31			
32			
33			
34			
35			
⋮			
42			
⋮			

b) ¿Cuál es la edad actual de cada uno?

c) Escribe en la tabla una expresión algebraica que represente las condiciones de cada enunciado; representa con x la edad de Elsa y con y la edad de Raúl.

Enunciado	Expresión algebraica
Elsa tiene 27 años más que Raúl. (o Raúl tiene 27 años menos que su mamá; o la diferencia de edades entre Elsa y Raúl es 27 años)	
Edad de Elsa dentro de 12 años	
Edad de Raúl dentro de 12 años	
Dentro de 12 años Elsa tendrá el doble de edad que Raúl.	

d) Plantea un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que represente el problema.

e) Verifica que los valores que obtuviste en el inciso *b* sean solución del sistema.

Compara tus respuestas con las de uno de tus compañeros, y si detectas errores, corrígelos.

7. Haz lo que se pide.

a) La suma de dos números positivos es 10 y su diferencia es 6. Plantea un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que represente el problema.

b) ¿Alguno de los números puede ser 10? ______ ¿Por qué? ______

c) Escribe los datos faltantes en la siguiente tabla.

+	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1		3							
2									
3									
4									
5			8						
6									
7									
8									
9									

d) ¿Cuáles parejas de números cumplen la primera condición del sistema?

____

e) ¿Alguna de estas parejas cumple la segunda condición? _______ En caso afirmativo, ¿cuál es esa pareja? _______________

f) Verifica que los números que encontraste en el inciso *e* sean solución del sistema de ecuaciones que planteaste.

- Compara tus respuestas con las de tus compañeros, y si detectas errores, corrígelos.

8. Formula un sistema de ecuaciones para cada problema.

a) Daniel compró una pluma y un lápiz y pagó \$8; Adriana compró ocho plumas y seis lápices en el mismo lugar y pagó \$54. ¿Cuál es el precio de una pluma y el de un lápiz?

b) La suma de dos números es 8 y el cuádruple de uno de ellos más el séxtuple del otro es igual a 38. ¿Cuáles son los números?

c) Por la mañana, una compañía de distribución de materiales de construcción mandó dos camiones de distinta capacidad para hacer una entrega de cemento; entre los dos entregaron 8 toneladas, cargados a su máxima capacidad. Por la tarde, uno de los camiones hizo cuatro viajes y el otro hizo seis y, entre ambos, entregaron 38 toneladas de cemento, también cargados a su máxima capacidad. ¿Cuántas toneladas de cemento lleva cada camión cargado a su máxima capacidad?

- Compara tus sistemas de ecuaciones con los de tus compañeros y discutan sus observaciones. ¿Cuántos problemas consideras que se pueden representar con un mismo sistema de ecuaciones?

9. Reúnete con dos compañeros y escriban tres problemas que estén representados por el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 24 \\ x - y = 4 \end{cases}$$

a) Problema 1: _______________

____

b) Problema 2: _______________

____

c) Problema 3: ____________________

____

____

Expongan sus respuestas al resto del grupo y verifiquen que todos los problemas propuestos se pueden representar con el sistema de ecuaciones.

¿Qué aprendí?

Aplico

Trabaja los siguientes ejercicios y problemas. Al terminar, revisa tus procedimientos y resultados, primero con ayuda de tus compañeros y luego con tu profesor.

1. Realiza lo que se pide y contesta.

a) Escribe la o las ecuaciones que representen cada enunciado.

Problema 1: El perímetro de un rectángulo mide 24 cm. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo? ____________________

Problema 2: La suma de dos números es 13 y uno de ellos es cuatro unidades mayor que el otro. ¿Cuáles son los números? ____________________

Problema 3: Por dos tortas y un jugo pagué $45. ¿Cuánto cuesta una torta?

____

Problema 4: El perímetro de un triángulo equilátero mide 27 cm. ¿Cuánto mide el lado del triángulo? ____________________

b) ¿Cuántas incógnitas tienen las ecuaciones en cada caso?

Problema 1: __________ Problema 2: __________

Problema 3: __________ Problema 4: __________

c) ¿En cuáles casos no puedes encontrar la solución sin más información?

____

d) Inventa información que te sirva para resolver el problema en los casos en que haga falta. ____________________

____

2. Lee el texto y haz lo que se solicita.

—Si me das un costal de tu carga, yo tendré el doble de costales que tú —dijo el burro Clarín al burro Platero.
—Si tú me das un costal, llevaremos la misma cantidad de costales cada uno —respondió Platero.
¿Cuántos costales llevaba cada burro?

a) Escribe las expresiones algebraicas que representen cada uno de los enunciados.

Enunciado	Expresión algebraica
Cantidad de costales de Clarín	
Cantidad de costales de Platero	
Cantidad de costales de Clarín si Platero le da uno de los suyos	
Cantidad de costales de Platero al entregarle un costal a Clarín	
—... yo tendré el doble de costales que tú —dice Clarín.	
Cantidad de costales de Platero si Clarín le da uno de los suyos	
Cantidad de costales de Clarín al entregarle un costal a Platero	
—...llevaremos lo mismo cada uno —dice Platero.	

b) ¿Cuál es el sistema de ecuaciones que representa el problema?

3. Escribe un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas para cada problema.

a) Doña Rosa vende artículos de barro. Un cliente le compró dos ollas y tres cazuelas y pagó $294. Otro cliente compró cinco ollas y cinco cazuelas, del mismo tipo que las anteriores, por $565. ¿Cuánto cuesta cada artículo?

b) El perímetro de un triángulo isósceles es de 31 cm. Cada uno de los lados iguales es cinco unidades mayor que el tercer lado. ¿Cuál es la longitud de cada lado?

c) En una librería se vendieron 35 libros a dos precios distintos: unos a $400 y otros a $250; por la venta de los libros se obtuvieron $11 900. ¿Cuántos libros de cada precio se vendieron?

d) Entre mi abuelo y mi hermano tienen 76 años. Si mi abuelo es 60 años mayor que mi hermano, ¿qué edad tiene cada uno?

Marca con una ✓ la casilla que describe tu desempeño.

Contenido		
Planteo sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.		
Nivel de logro	A	Requiero ayuda para realizarlo.
	B	Lo hago, pero en ocasiones necesito ayuda.
	C	Lo hago de manera autónoma.

Secuencia didáctica 19

Aprendizaje esperado: Resolverás problemas mediante la formulación y solución algebraica de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.
Contenido: Resolverás problemas mediante la formulación y solución gráfica de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Una, ninguna o una infinidad

1. Haz lo que se pide.

Las magnitudes x y y varían en forma lineal de acuerdo con las siguientes relaciones:

$$y = 2x - 1$$
$$y = -x + 2$$

Glosario

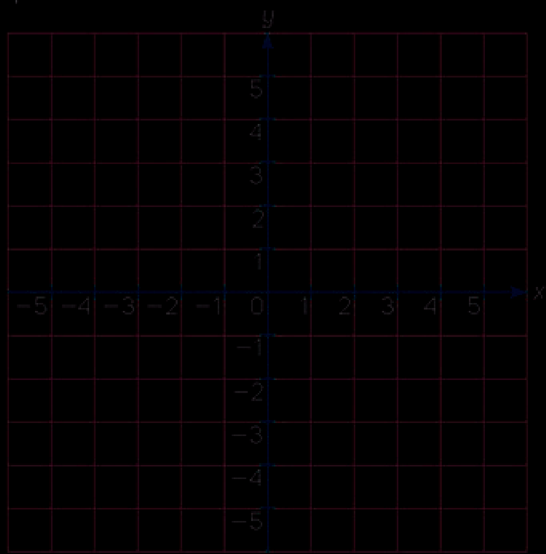
variación lineal.

a) Escribe los datos faltantes en las tablas.

x	-2	-1	0	1	2	3
$y = 2x - 1$						

x	-2	-1	0	1	2	3
$y = -x + 2$						

b) En el plano cartesiano, traza las rectas correspondientes a cada relación. Usa colores diferentes para cada recta.



c) ¿Cuáles son las coordenadas del punto donde se cortan las rectas?

$x =$ ______ $y =$ ______

d) Comprueba que x y y satisfacen las dos relaciones.

Compara tus respuestas con el resto del grupo. Si detectas errores, corrígelos.

2. Reúnete con un compañero y hagan lo que se pide.

Un depósito A se llena de manera que el nivel del agua sube un metro por minuto. Otro depósito B se vacía de forma que el nivel del agua baja un metro por minuto. El llenado y el vaciado de los depósitos comienza en el mismo momento, cuando el depósito A está vacío y el nivel del agua en el depósito B es de 8 metros.

a) Escriban los datos faltantes en la tabla.

	Tiempo (min)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Altura del agua (m)	**Depósito A**	0								
	Depósito B	8								

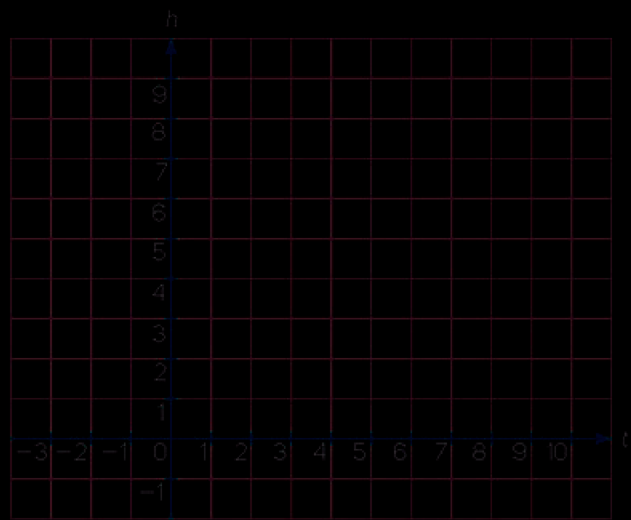
b) Representen la relación de variación entre la altura del agua en el depósito A y los minutos transcurridos. ________ ¿La altura y el tiempo varían de manera lineal? ______ Expliquen su respuesta. ________________

____

c) Usen las mismas literales que en el inciso *b* para representar la variación entre la altura del agua en el depósito B y el tiempo transcurrido. ________________
¿La altura y el tiempo varían de manera lineal? ______ Expliquen su respuesta.

____

d) En el plano cartesiano, tracen con color verde la recta correspondiente a la variación de la altura en el depósito A y con azul la recta correspondiente al depósito B.



e) ¿Cuáles son las coordenadas del punto donde se cortan las rectas? ________

f) Planteen un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas para el problema de los depósitos de agua.

____

g) ¿En qué minuto los dos depósitos tenían la misma altura de agua? ______

¿Cuál era esa altura? ______

h) ¿Cuál es la solución del sistema de ecuaciones? ______

¿Qué relación hay entre la solución y las coordenadas del punto donde se cortan las rectas? ______

______

Discutan sus observaciones con el resto del grupo y lleguen a un acuerdo sobre la relación entre las coordenadas del punto donde se cortan las rectas y la solución del sistema. Comparen su acuerdo con el siguiente texto.

Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas siempre puede representarse gráficamente mediante dos rectas.

Si el sistema de ecuaciones es...

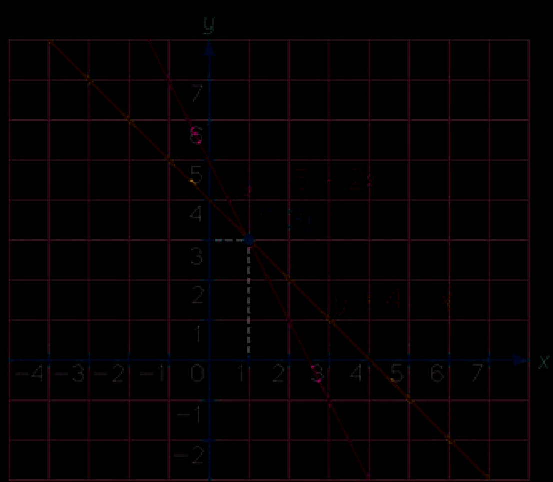
$$\begin{cases} y = ax + b \\ y = cx + d \end{cases}$$

Si las rectas se intersecan en el punto de coordenadas (x, y), entonces la pareja de valores x y y es solución del sistema de ecuaciones.

Por ejemplo, la solución del sistema...

$$\begin{cases} y = 4 - x \\ y = 5 - 2x \end{cases}$$

es $x = 1$, $y = 3$, pues las rectas se cortan en el punto de coordenadas (1, 3).

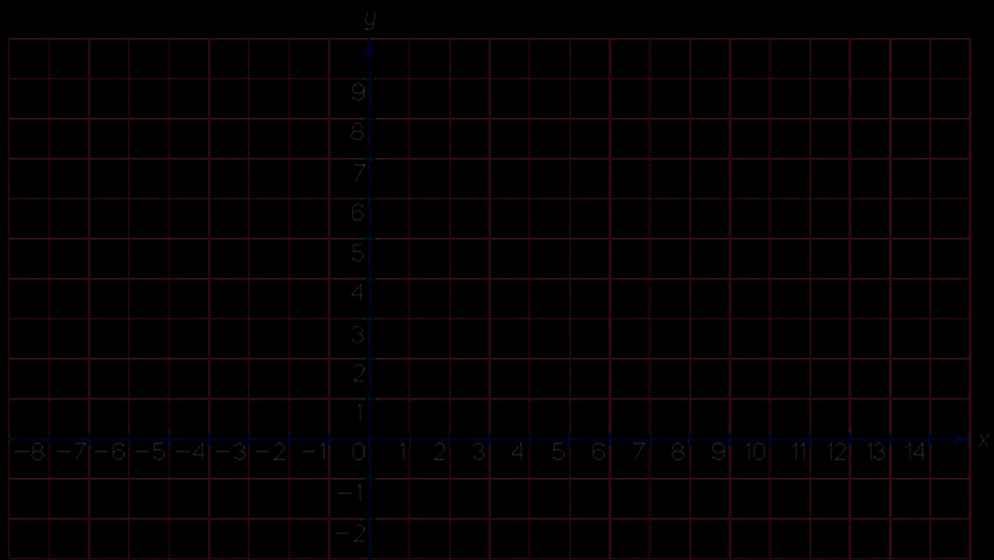


3. Reúnete con un compañero y hagan lo que se pide.

El perímetro de un rectángulo mide 24 cm y la longitud del lado y mide 6 cm más que la del lado x.

a) Planteen el sistema de ecuaciones correspondiente al problema.

b) En el plano cartesiano, tracen las dos rectas del sistema. Usen colores distintos para cada recta.



c) Comprueben que las coordenadas x y y del punto de intersección de las rectas son solución del sistema de ecuaciones.

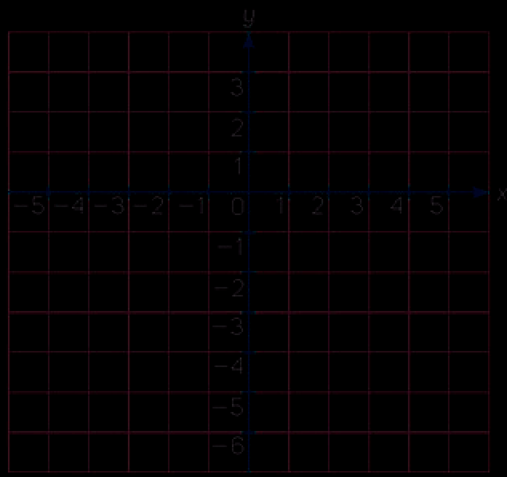
d) ¿Es posible que exista otra solución del sistema? ________ Expliquen su respuesta.

e) ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo? ________

Comparen sus respuestas con otro equipo. Si detectan errores, corríjanlos.

4. Reúnete con un compañero y representen el sistema de ecuaciones en el plano cartesiano de la siguiente página, luego respondan.

$$\begin{cases} y = 5x - 4 \\ y = 5x - 3 \end{cases}$$



Glosario

pendiente de una recta.

ordenada al origen.

a) ¿Cuál es la pendiente de cada una de las rectas? ____________ y ____________

b) ¿Cuál es su ordenada al origen? ____________ y ____________

c) ¿Hay algún punto que esté en ambas rectas? ________ Expliquen su respuesta.

____

____

d) ¿El sistema de ecuaciones puede tener solución? ________ Expliquen su respuesta. ____

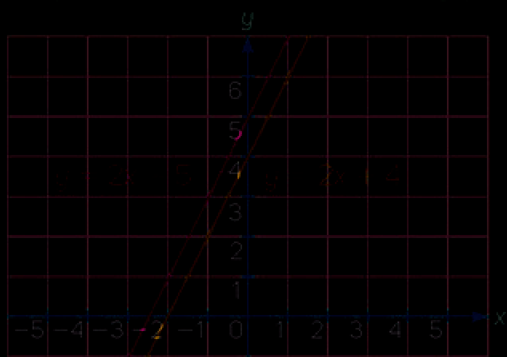
____

- Discutan sus respuestas con el resto del grupo y lleguen a un acuerdo. Comparen su resolución con la siguiente información.

Si las rectas correspondientes al sistema de ecuaciones son paralelas con diferente ordenada al origen, no se cortan en ningún punto y, por tanto, **el sistema de ecuaciones no tiene solución**. Para saber si las rectas son paralelas, basta verificar que sus pendientes son iguales. Por ejemplo, el sistema de ecuaciones...

$$\begin{cases} y = 2x + 4 \\ y = 2x + 5 \end{cases}$$

no tiene solución, pues la pendiente de ambas rectas es 2 y, por tanto, son paralelas.



Trimestre 2

¿Vamos bien?

Aplica lo que has aprendido para resolver lo siguiente. Al terminar, compara tus procedimientos y los resultados que obtuviste con los de tus compañeros.

Determina si los sistemas de ecuaciones tienen solución o no.

a) $\begin{cases} y = \frac{4}{3}x + \frac{1}{3} \\ y = x + 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y = 2x + 3 \\ y = 2x - 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y = -2x + 6 \\ y = -2x + \frac{18}{5} \end{cases}$

5. Haz lo que se pide.

   a) Escribe las coordenadas de tres puntos que estén sobre la recta correspondiente a la primera ecuación del siguiente sistema. ____________

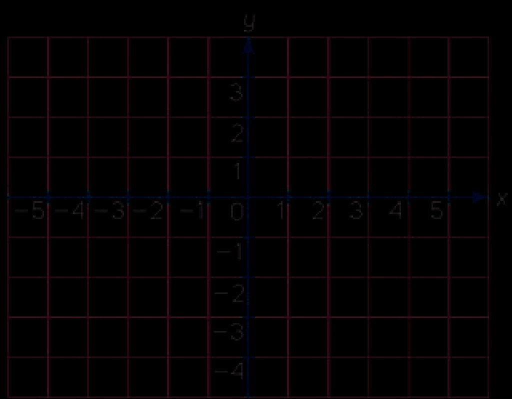
   $$\begin{cases} y = 2x - 3 \\ -2y = 6 - 4x \end{cases}$$

   b) ¿Algunas de esas parejas de puntos satisfacen la segunda ecuación? ________

   c) ¿Cuál es la pendiente de cada recta? ____________ y ____________

   d) ¿Cuál es su ordenada al origen? ____________ y ____________

   e) Grafica las rectas en el plano cartesiano.



   f) Escribe las coordenadas de otros tres puntos que estén en ambas rectas. ________ ____________ ¿Estos puntos son solución del sistema? ________ ¿Por qué? ____________

   g) ¿Cuántas soluciones piensas que tiene este sistema de ecuaciones? ____________ ¿Por qué? ____________

Discute tus respuestas con el resto del grupo y lleguen a un acuerdo. Después comparen su acuerdo con la información de la siguiente página.

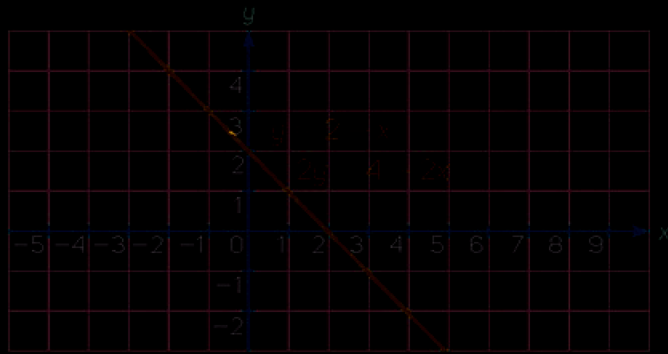
Si las rectas correspondientes al sistema de ecuaciones coinciden en la gráfica, **el sistema tiene una infinidad de soluciones**. Para saber si las rectas coinciden, basta verificar que sus pendientes y sus ordenadas al origen son iguales.

www.esant.mx/
essema2-011

Por ejemplo, el sistema de ecuaciones...

$$\begin{cases} y = 2 - x \\ 2y = 4 - 2x \end{cases}$$

tiene una infinidad de soluciones ya que las dos ecuaciones representan a la misma recta.



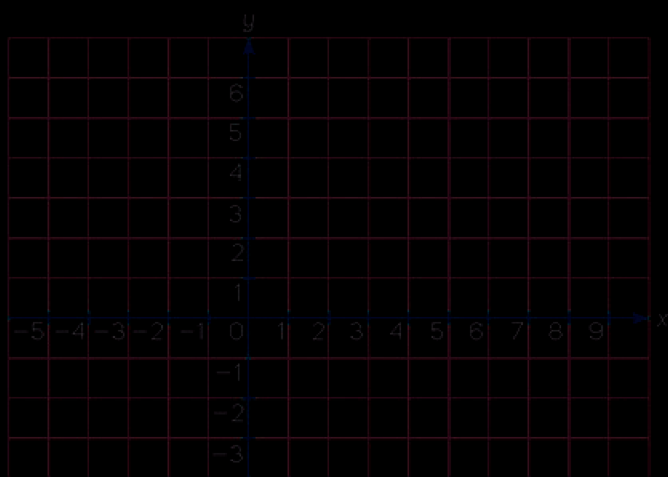
¿Qué aprendí?

Aplico

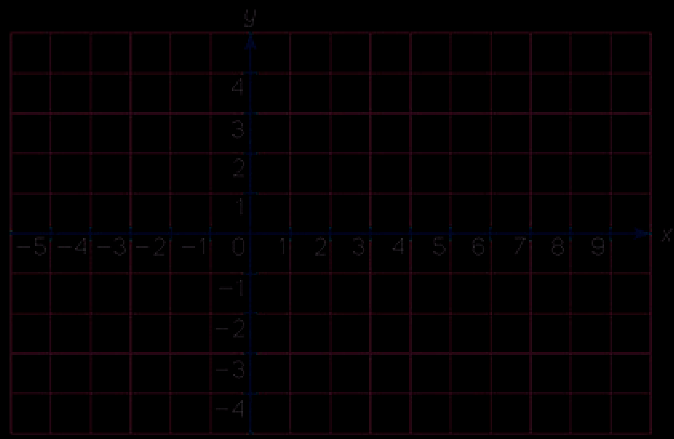
Trabaja los siguientes ejercicios y problemas. Al terminar, revisa tus procedimientos y tus resultados, primero con ayuda de tus compañeros y luego con tu profesor.

1. Representa gráficamente los sistemas de ecuaciones y determina si tienen solución única, una infinidad de soluciones o no tienen solución.

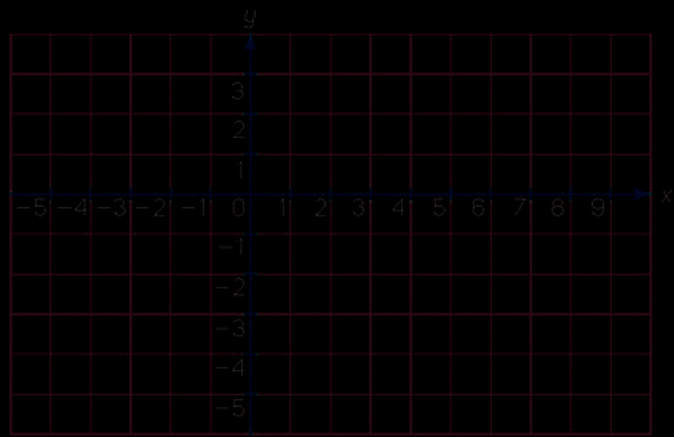
a) $\begin{cases} y = 2 - \dfrac{2}{3}x \\ y = 6 - \dfrac{3}{2}x \end{cases}$



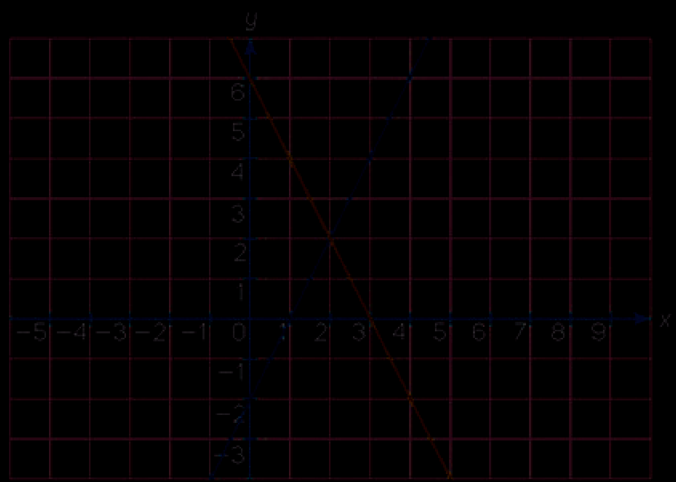
b) $\begin{cases} y = \frac{2}{3}x + 2 \\ y = \frac{2}{3}x - 2 \end{cases}$



c) $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x - 3 \\ 2y = x - 6 \end{cases}$



2. Plantea el sistema de ecuaciones correspondiente a la representación gráfica.



a) ¿Cuál es la solución del sistema?

b) Comprueba tus respuestas.

Marca con una ✓ la casilla que describe tu desempeño.

Resuelvo problemas mediante la formulación y solución gráfica de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Nivel de logro		
A		Requiero ayuda para realizarlo.
B		Lo hago, pero en ocasiones necesito ayuda.
C		Lo hago de manera autónoma.

Taller de tecnología

Representación gráfica de sistemas de ecuaciones

Abre una hoja de GeoGebra y elige una vista con ejes, cuadrícula y "Vista Algebraica". Si es necesario, usa la herramienta "Desplaza Vista Gráfica" del último icono, para mover los ejes de manera que queden más o menos en el centro.

Imagen 1

Sigue estos pasos para construir las rectas que representan a un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

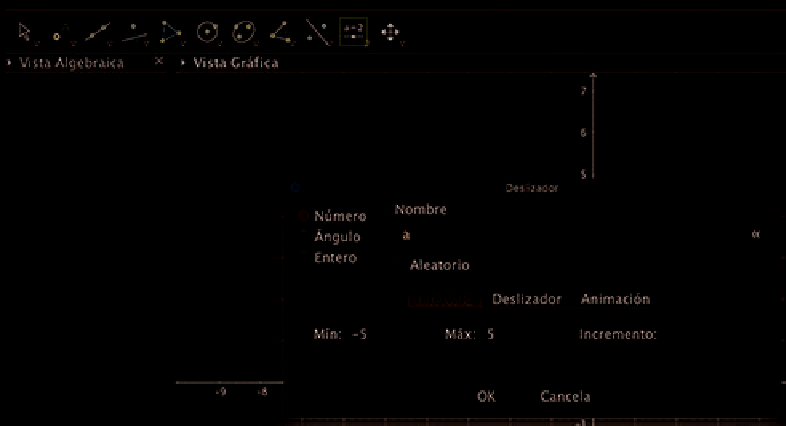


Imagen 2

a) Selecciona la herramienta "Deslizador" del penúltimo icono y haz clic en cualquier lugar de la vista gráfica. Se abrirá un cuadro de diálogo como el de la imagen de la izquierda (imagen 2).

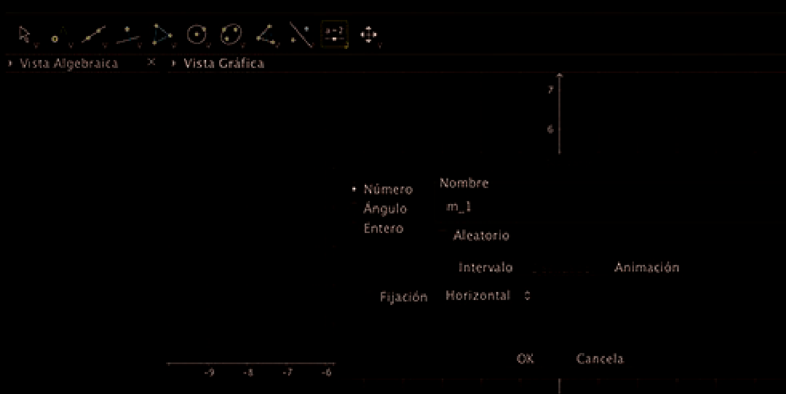


Imagen 3

b) En la casilla "Nombre", escribe "m_1"; en la casilla "Intervalo", anota "-10" en "Mín" y "10" en "Máx"; en "Incremento", escribe el número 0.1. En la pestaña "Deslizador", asegúrate de que no esté señalada la casilla "Fijación" para que puedas mover el deslizador y colocarlo donde más te guste; en la casilla "Posición", elige "Horizontal", y si aparece la opción "Ancho", anota 200. En la pestaña "Animación", deja la velocidad 1 y confirma que en "Repite" aparezca la palabra "Oscilante".

c) Presiona "OK" para que aparezca el deslizador. Con el botón auxiliar, haz clic sobre el deslizador y selecciona "Propiedades". En la nueva caja de diálogo elige un tono de rojo.

d) Repite los pasos anteriores para crear un deslizador de un número que se llame "b_1". En este caso también usaremos un intervalo de -10 a 10 variando con un incremento de 0.25 unidades, en posición horizontal y de una longitud de 200. Escoge algún tono de azul.

e) Usando la flecha del primer icono, coloca los deslizadores en alguna esquina de la vista gráfica y, si quieres, fíjalos en esa posición usando el botón auxiliar y las instrucciones "Propiedades"/"Deslizador"/"Fijación".

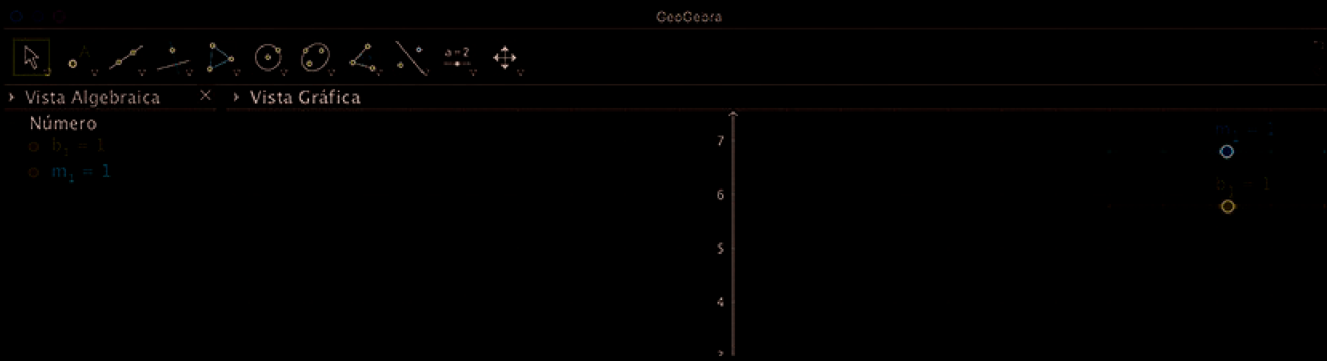


Imagen 4

f) En la parte inferior de la hoja aparece la barra de entrada. Escribe en ella "m_1 x + b_1". Es muy importante que dejes espacio entre m_1 y x porque eso activa la operación producto. Al presionar Enter, aparecerá la recta. Si la animación está activada, desactívala con el botón derecho del ratón. Selecciona la flecha del primer icono (o presiona Esc) para mover los valores de los deslizadores y observa qué pasa con la recta y con la ecuación lineal que aparece en la vista algebraica.

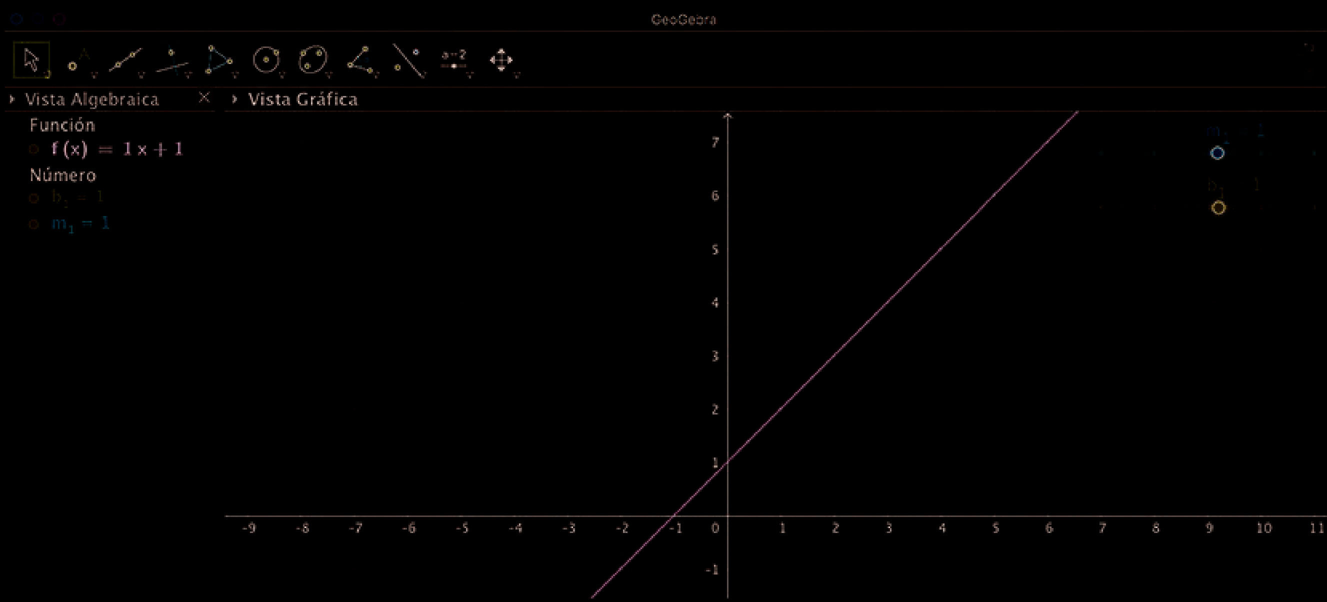


Imagen 5

g) Repite las instrucciones de los incisos anteriores para crear dos nuevos deslizadores "m_2" y "b_2".

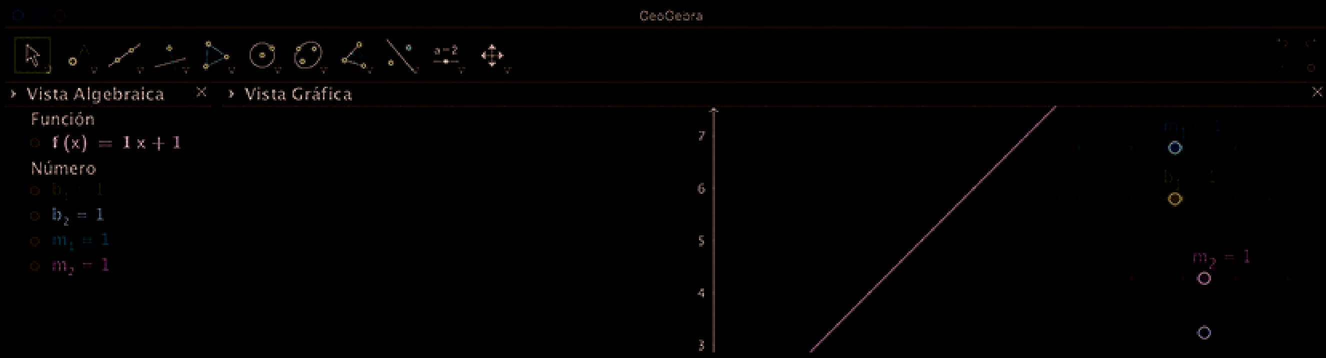


Imagen 6

h) En la barra de entrada escribe "m_2 x + b_2"; recuerda dejar espacio entre m_2 y x. Al presionar Enter aparecerá la nueva recta.

Imagen 7

Entrada: m_2 x+b_2

¿Qué valores aparecen en tus deslizadores m_1 (m_1) y m_2 (m_2)? ______

¿Y en tus deslizadores b_1 (b_1) y b_2 (b_2)? ______

¿Se ve la segunda recta que creaste? ______ En caso contrario, ¿a qué piensas que se debe? ______

______

i) Mueve los deslizadores y observa el comportamiento de las rectas. Observa también cómo se refleja ese cambio en las ecuaciones lineales de la vista algebraica.

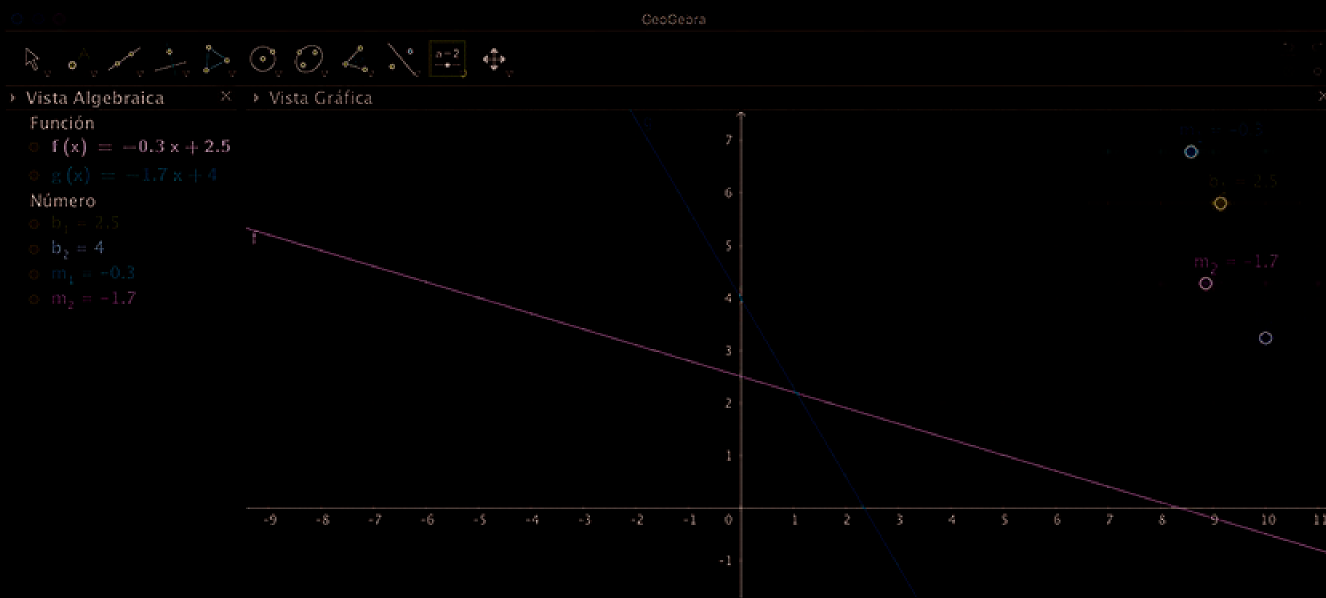


Imagen 8

j) En el segundo icono, elige la opción "Intersección" y con el ratón señala las rectas. En la vista algebraica aparecerán las coordenadas del punto de intersección (*A*).

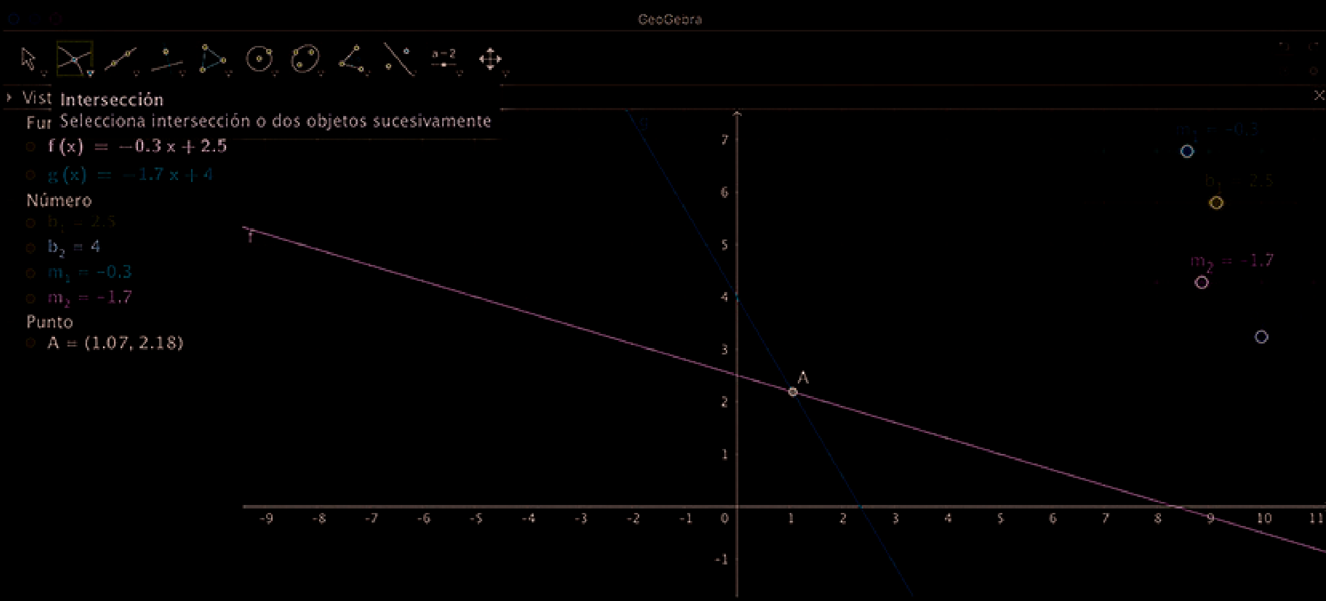


Imagen 9

- Mueve los deslizadores b_1 (b_1) y b_2 (b_2) y observa cómo se modifican las coordenadas del punto *A*. Comprueba que las coordenadas del punto *A* son solución del sistema de ecuaciones formado por las ecuaciones lineales que aparecen en la zona "Vista Gráfica".
Repite esto para varias posiciones de los deslizadores b_1 (b_1) y b_2 (b_2).

- Ahora mueve los deslizadores m_1 (m_1) y m_2 (m_2) y observa cómo se modifican las coordenadas del punto *A*. Comprueba que las coordenadas del punto *A* son solución del sistema de ecuaciones formado por las ecuaciones lineales que aparecen en la zona "Vista Gráfica".
Repite esto para varias posiciones de los deslizadores m_1 (m_1) y m_2 (m_2).

- Mueve los deslizadores de manera que m_1 (m_1) y m_2 (m_2) tengan el mismo valor. ¿Qué sucede con el punto *A*?

Repite esto para varias posiciones de los deslizadores m_1 (m_1) y m_2 (m_2). ¿Qué significa esto respecto al sistema de ecuaciones?

- Sin modificar los valores de m_1 (m_1) y m_2 (m_2), mueve los deslizadores b_1 (b_1) y b_2 (b_2) de manera que tengan el mismo valor.
Repite esto para varias posiciones de los deslizadores b_1 (b_1) y b_2 (b_2). ¿Qué sucede con las rectas? ¿Qué significa esto respecto al sistema de ecuaciones?

Secuencia didáctica

20

Aprendizaje esperado: Resolverás problemas mediante la formulación y solución algebraica de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.
Contenido: Resolverás problemas mediante la formulación y solución algebraica de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Sustituir, igualar, sumar o restar

1. Reúnete con un compañero, analicen el sistema de ecuaciones y respondan.

$$\begin{cases} x + y = 24 \\ y = 16 \end{cases}$$

a) ¿Pueden saber cuál es el valor de la incógnita x? __________ ¿Qué tendrían que hacer para encontrarlo? ______________________________

b) Ahora analicen este otro sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} x + y = 24 \\ y = 2x \end{cases}$$

¿Qué deberían hacer para encontrar el valor de x? ______________________________

c) ¿Hay alguna diferencia entre el procedimiento que eligieron en el inciso *b* y el que usaron en el inciso *a*? ______________________________

- Discutan sus respuestas con el resto del grupo y lleguen a un acuerdo.

Sustituir

2. Lee el problema y haz lo que se pide.

Berenice tiene dos cubetas, a una le caben cuatro litros más que a la otra y juntas tienen capacidad para 10 litros. ¿Cuál es la capacidad de cada cubeta?

a) Llama x a la capacidad de la cubeta más pequeña y y a la otra. Escribe una ecuación que exprese que a una de ellas le caben cuatro litros más que a la otra. __________

b) Escribe otra ecuación que represente la condición de que juntas tienen capacidad para 10 litros. ______________________________

c) Sustituye la expresión de la variable y en la ecuación del inciso *b*. Escribe la expresión que obtienes. ____________________ ¿Cuántas incógnitas tiene esta nueva ecuación? ______________________________

d) ¿Cuál es el valor de x? ______________________________

e) Sustituye el valor de x en la ecuación del inciso *a* y determina el valor de y.

____

f) ¿Los valores de x y y que encontraste son solución del sistema de ecuaciones? __________ ¿Por qué? ______________________________

- Discutan en grupo el procedimiento que siguieron para resolver el sistema de ecuaciones.

3. Reúnete con un compañero y escriban en la tabla lo que se pide.

Para resolver el sistema de ecuaciones...	$\begin{cases} x + y = 8 \\ 4x + 6y = 54 \end{cases}$
Despejen y de la primera ecuación.	
Sustituyan el valor de y en la segunda ecuación.	
Eliminen los paréntesis y agrupen los términos semejantes.	
Despejen la incógnita x y encuentren su valor.	
Sustituyan el valor de x en la segunda ecuación del sistema.	
Encuentren el valor de y.	
Comprueben que los valores que encontraron son solución del sistema de ecuaciones.	

Comparen sus respuestas con las de otra pareja y si detectan errores, corríjanlos.

Un método para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas consiste en despejar una de las incógnitas en una de las ecuaciones y sustituirla en la otra.

Por ejemplo, para resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y = 35 \\ 2x + 4y = 94 \end{cases}$$

1. Despejamos x en la primera ecuación: $x = 35 - y$.
2. Sustituimos esta expresión en la segunda ecuación: $2(35 - y) + 4y = 94$.
3. Al efectuar las operaciones y agrupar los términos semejantes obtenemos la ecuación: $2y + 70 = 94$, cuya solución es $y = 12$.
4. Por último sustituimos este valor en la primera ecuación: $x + 12 = 35$, de donde concluimos que $x = 23$.

También se puede comenzar despejando primero la incógnita y y sustituyéndola en la otra ecuación.

A este método de solución de sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas se le llama **método de sustitución**.

¿Vamos bien?

Resuelve lo siguiente con base en lo que has aprendido. Al terminar, compara tus procedimientos y tus resultados con los de tus compañeros.

I. Usa el método de sustitución para encontrar la solución de los sistemas y comprueba que los valores obtenidos son solución del sistema.

a) $\begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ 4x - 3y = -1 \end{cases}$ $x =$ ______ $y =$ ______

b) $\begin{cases} x + 6y = 8 \\ 2x + 5y = 2 \end{cases}$ $x =$ ______ $y =$ ______

II. Revisa lo que hiciste en la actividad 1 y comprueba que hayas llegado a las respuestas correctas. Si detectas errores, corrígelos.

Igualar

4. Reúnete con un compañero, analicen los sistemas de ecuaciones y respondan.

$$\begin{cases} -2x + 6y = 14 \\ 3x - 3y = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} -2x + 6y = 14 \\ 3x = 3y + 3 \end{cases} \quad \begin{cases} -2x + 6y = 14 \\ x = \dfrac{3y + 3}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} -2x + 6y = 14 \\ x = y + 1 \end{cases}$$

a) ¿Son equivalentes las expresiones algebraicas que representan a las segundas ecuaciones de los sistemas? ______ Expliquen su respuesta. ______

______

b) ¿Habrá alguna diferencia entre los cuatro sistemas de ecuaciones? ______

¿Por qué? ______

c) Ahora analicen estos sistemas.

$$\begin{cases} -2x + 6y = 14 \\ 3x - 3y = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} -2x = -6y + 14 \\ 3x = 3y + 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \dfrac{-6y + 14}{-2} \\ x = \dfrac{3y + 3}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3y - 7 \\ x = y + 1 \end{cases}$$

d) ¿Son equivalentes las primeras ecuaciones de los sistemas? ______ Expliquen su respuesta. ______

______

e) ¿Habrá alguna diferencia entre estos cuatro sistemas de ecuaciones? ______

¿Por qué? ______

______

f) ¿Qué pueden concluir sobre los siguientes sistemas de ecuaciones?

$$\begin{cases} -2x + 6y = 14 \\ 3x - 3y = 3 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} x = 3y - 7 \\ x = y + 1 \end{cases}$$

______

g) Como ambas incógnitas deben valer lo mismo en las dos ecuaciones del sistema, ¿será cierto que $3y - 7 = y + 1$? ______

h) ¿Cuántas incógnitas tiene la ecuación del inciso anterior? ______
¿Cuál es el valor de y? ______

i) Si sustituyen ese valor de y en la ecuación $x = y + 1$, ¿cuál es el valor de x?
______

j) Sustituyan la pareja de valores x y y que encontraron en el primer sistema de ecuaciones de la actividad. ¿Qué observan? ______
______

k) Sustituyan los valores de x y y en todos los demás sistemas y escriban sus observaciones. ______
______

Discutan sus respuestas con el resto del grupo y lleguen a un acuerdo.

5. Sigue las indicaciones.

a) Escribe en la tabla lo que se pide. En tu cuaderno, haz las operaciones necesarias.

Para resolver el sistema de ecuaciones...	$\begin{cases} 3x + y = -1 \\ 4x - y = 1 \end{cases}$
Despeja y en cada ecuación.	
Iguala los miembros derechos de las ecuaciones del paso anterior.	
Realiza las operaciones necesarias para despejar x.	
Encuentra el valor de x.	
Sustituye el valor de x en la primera ecuación del sistema de ecuaciones.	
Encuentra el valor de y.	
Comprueba que los valores que encontraste son solución del sistema de ecuaciones.	

b) Repite los pasos anteriores, pero ahora despeja primero la incógnita x.

Compara tus respuestas con las de otro compañero y si detectan errores, corríjanlos. Luego comparen la resolución con la información de la siguiente página.

Otro método para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas consiste en despejar una de las incógnitas en ambas ecuaciones e igualar estas últimas.

Así, por ejemplo, para resolver el sistema:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

1. Despejamos x en ambas ecuaciones:

$$\begin{cases} x = \dfrac{7 - 3y}{2} \\ x = 1 + y \end{cases}$$

2. Igualamos las expresiones para obtener una ecuación con una sola incógnita.

$$\frac{7 - 3y}{2} = 1 + y$$

3. Resolvemos esta ecuación y obtenemos $y = 1$.
4. Sustituimos este valor en cualquiera de las ecuaciones del sistema, por ejemplo en la segunda, y obtenemos $x = 1 + 1 = 2$. De modo que la pareja de valores $x = 2$, $y = 1$ es la solución del sistema.

A este método de solución se le conoce como **método de igualación**.

¿Vamos bien?

Resuelve lo siguiente con base en lo que has aprendido. Al terminar, compara tus procedimientos y tus resultados con los de tus compañeros.

Usando el método de igualación, encuentra la solución de los sistemas y comprueba que los valores obtenidos son solución del sistema.

a) $\begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ 3x + y = 90 \end{cases}$ $x =$ ________ $y =$ ________

b) $\begin{cases} 4x - y = 15 \\ 4x + y = 9 \end{cases}$ $x =$ ________ $y =$ ________

Sumar o restar

6. Plantea el sistema de ecuaciones correspondiente al problema y responde.

El perímetro de un triángulo isósceles mide 15 cm; la diferencia entre la longitud de uno de los lados iguales (x) y la del lado desigual (y) es de 3 cm. ¿Cuáles son las dimensiones del triángulo?

a) Suma término a término las dos ecuaciones y escribe el resultado de la suma.

____

b) ¿Cuál es el coeficiente de la incógnita x en la ecuación que obtuviste al sumar? ____________________ ¿Y el coeficiente de la incógnita y? ____________________

c) Encuentra el valor de la incógnita x y sustitúyelo en alguna de las ecuaciones del sistema. ____________________

d) ¿Cuál es el valor de y? ____________________

e) Verifica que los valores que encontraste son solución del sistema de ecuaciones.

f) ¿Cuáles son las dimensiones del triángulo isósceles? ____________________

Glosario

coeficiente.

- Compara tus resultados con los de tus compañeros y si detectas errores, corrígelos.

7. Considera el sistema de ecuaciones y haz lo que se pide.

$$\begin{cases} 4x + 3y = 10 \\ 5x + 7y = 45 \end{cases}$$

a) Multiplica por 7 los términos de la primera ecuación y por 3 los de la segunda.

b) Resta la segunda ecuación a la primera. ____________________

c) Despeja x y resuelve la ecuación. ____________________

d) Sustituye el valor de x en la primera ecuación del sistema original. ____________________

e) Despeja y y resuelve la ecuación. ____________________

f) Comprueba que los valores que obtuviste son solución del sistema de ecuaciones.

- Discute tus respuestas con tus compañeros y después compárenlas con la siguiente información.

Otro método para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas consiste en:

1. Multiplicar cada una de las ecuaciones del sistema por un número que haga que los coeficientes de alguna de las incógnitas sean iguales.
2. Sumar o restar las dos ecuaciones del sistema, obteniendo una ecuación con una sola incógnita.
3. Resolver esta ecuación y sustituir el valor obtenido en alguna de las ecuaciones del sistema original para encontrar el valor de la otra incógnita.

A este método de solución de un sistema de ecuaciones se le conoce como **método de suma y resta**.

8. Haz lo que se pide para resolver el sistema de ecuaciones con el método de suma y resta.

$$\begin{cases} 3x + 4y = -10 \\ 2x + 5y = 5 \end{cases}$$

a) Multiplica por 2 los dos miembros de la primera ecuación del sistema, y los dos miembros de la segunda ecuación por 3. Escribe el sistema resultante.

b) ¿Cuál es ahora el coeficiente de la incógnita x en las dos ecuaciones? ______

c) Resta la segunda ecuación de la primera y escribe el resultado. ______

d) ¿Cuántas ecuaciones te quedaron? ______ ¿Cuál es el coeficiente de la incógnita x en la ecuación obtenida al restar? ______ ¿Cuál es el coeficiente de la incógnita y? ______

e) Resuelve la ecuación que te quedó. ______

f) Sustituye el valor que obtuviste en cualquiera de las ecuaciones del sistema original. ______ ¿Cuál es el valor de x? ______

g) Verifica que los valores que obtuviste son solución del sistema de ecuaciones.

- Compara tus resultados con los de tus compañeros y si detectas errores, corrígelos.

¿Qué aprendí?

Aplico

Trabaja los siguientes ejercicios y problemas. Al terminar, revisa tus procedimientos y tus resultados, primero con tus compañeros y luego con tu profesor.

1. Resuelve los sistemas de ecuaciones utilizando el método que se indica en cada caso.

a) Con el método de sustitución

$$\begin{cases} 5x - 6y = -4 \\ -3x + 4y = 0 \end{cases}$$

b) Con el método de igualación

$$\begin{cases} 4x - 5y = 0 \\ 4x + 5y = 200 \end{cases}$$

c) Con el método de suma y resta

$$\begin{cases} 6x - 5y = 27 \\ x + 2y = -4 \end{cases}$$

2. En la secuencia 18 planteaste el sistema de ecuaciones correspondiente al enunciado:

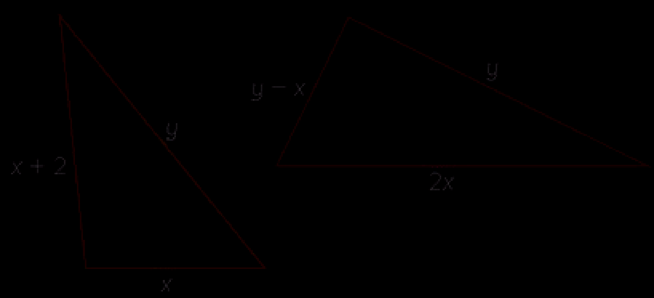
"—Si me das un costal de tu carga, yo tendré el doble de costales que tú —dijo el burro Clarín a Platero.
—Si tú me das un costal, llevaremos la misma cantidad de costales cada uno —respondió Platero.
¿Cuántos costales llevaba cada burro?"

Encuentra la solución.

3. Plantea un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas para cada situación y resuélvelo con alguno de los métodos que aprendiste en esta secuencia.

a) La edad de Mireya es la cuarta parte de la edad de su papá. Dentro de 7 años, será la tercera parte. ¿Qué edades tienen Mireya y su papá?

b) El perímetro del triángulo de la izquierda mide 21 cm y el de la derecha 23 cm. ¿Cuánto valen x y y?



c) El día del estreno de una película se vendieron 165 boletos (normales y para estudiantes con credencial) y se recaudaron $5 250. Si el boleto normal costó $40 y el boleto para estudiantes con credencial $25, ¿cuántos boletos normales y cuántos para estudiantes con credencial se vendieron?

d) Una tubería de 360 m de largo se compone de 150 tubos, unos miden 1.8 m de largo y los otros miden 2.7 m. ¿Cuántos tubos de cada longitud hay?

Marca con una ✓ la casilla que describe tu desempeño.

Resuelvo problemas mediante la formulación y solución algebraica de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Nivel de logro		
	A	Requiero ayuda para realizarlo.
		Lo hago, pero en ocasiones necesito ayuda.
	C	Lo hago de manera autónoma.

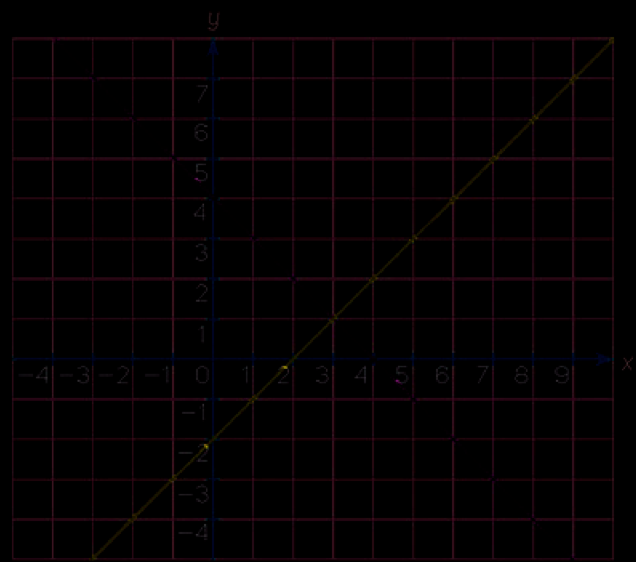
Un alto en la espiral

Resuelve los problemas. Con base en tus resultados, y con ayuda de tu profesor, identifica las secuencias correspondientes a los contenidos que debes repasar.

1. Plantea un sistema de ecuaciones para el siguiente problema.

   Doña Luisa y doña Berta lavan juntas su ropa. Las dos llenan la pileta de su lavadero acarreando agua desde una llave.
   Cuando terminan de llenar las dos piletas, doña Berta dice:
   —Uy, doña Luisa, con esa cubetita hizo 30 viajes a la llave. En cambio, yo solo fui 20 veces.
   —Sí, doña Berta —contestó doña Luisa—, pero usted con esa cubetota cargó cuatro litros más que yo en cada viaje.
   ¿Cuántos litros caben en cada cubeta?

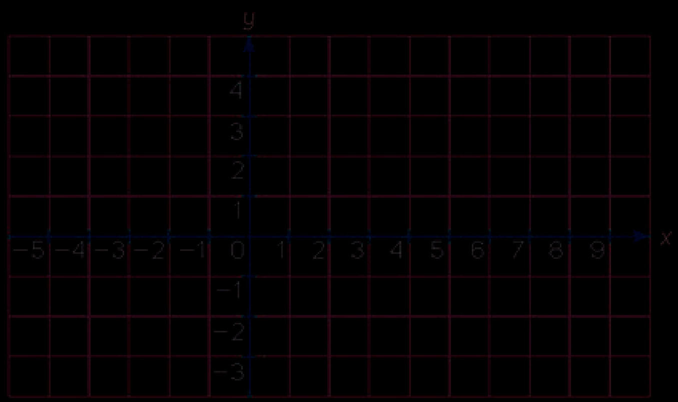
2. Escribe el sistema de ecuaciones que se representa en la gráfica.



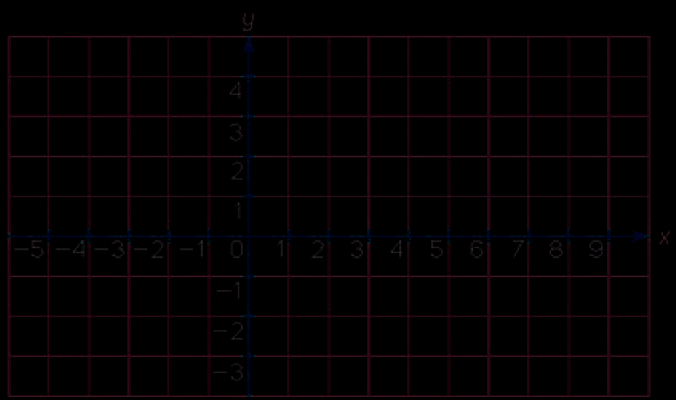
   ¿Cuál es la solución del sistema?

3. Representa geométricamente los sistemas de ecuaciones y determina si tienen solución única, una infinidad de soluciones o no tienen solución.

   a) $\begin{cases} x - y = -1 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$



b) $\begin{cases} 2x - y = -4 \\ 6x - 3y = 6 \end{cases}$



4. Plantea un sistema de ecuaciones para cada problema y resuélvelo con cualquiera de los métodos algebraicos que aprendiste.

a) Esther tiene dos cubetas, a una le caben tres litros más que a la otra y juntas tienen capacidad para 21 litros. ¿Cuál es la capacidad de cada cubeta?

b) El perímetro de un rectángulo mide 120 cm y el lado *b* mide 10 cm más que el lado *a*. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?

En la columna "Nota", marca una ✓ en los reactivos que resolviste correctamente.

[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1		18	146-153
2		19	154-161
3		19	154-161
4		20	166-173

Reflexiona sobre tus resultados y, con tu profesor, busca estrategias para fortalecer tus áreas de oportunidad.

Secuencia didáctica 21

Aprendizaje esperado: Resolverás problemas de proporcionalidad directa e inversa y de reparto proporcional.
Contenido: Resolverás problemas de reparto proporcional.

El que parte y reparte

1. Analiza con un compañero el texto y hagan lo que se pide.

Un concurso consiste en sacar seis objetos del fondo de una alberca. Se hacen dos rondas y en cada una se reparten 30 puntos entre los tres concursantes, de acuerdo con el número de objetos que extrajeron. En la siguiente tabla se registra el número de objetos que sacó cada concursante.

	Primera ronda		Segunda ronda	
Juan	2		1	
Pablo	2		2	
Luis	2		3	
Total	6	30	6	30

a) Escriban en la tabla el número de puntos que ganó cada concursante en cada ronda.

b) ¿Qué hicieron para determinar el número de puntos de cada concursante en cada ronda?

1.ª ronda: ______________________________

____

2.ª ronda: ______________________________

____

c) Una semana después, repitieron el concurso, pero ahora se repartieron 80 puntos entre cuatro concursantes. Nadie sabía cuántos objetos había que sacar de la alberca en cada ronda. En la tabla se registra el número de objetos sacados por los concursantes en cada ronda. Complétenla (escriban con lápiz, por si deben hacer correcciones).

	Primera ronda		Segunda ronda	
Andrés	3		6	
Pablo	2		7	
Saúl	5		4	
Arturo	6		3	
Total		80		80

d) ¿Qué hicieron para determinar el número de puntos que le toca a cada concursante de acuerdo con el número de objetos que extrajo en cada ronda?

1.ª ronda:

2.ª ronda:

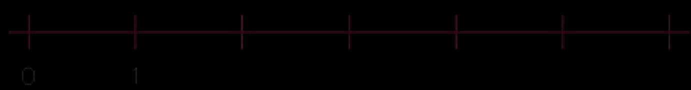
- Comparen sus tablas, sus respuestas y sus procedimientos con los de otros estudiantes. Si hay diferencias, traten de llegar a un acuerdo; si no lo logran, sigan trabajando y después revisen de nuevo.

2. Trabaja individualmente las siguientes variantes del problema de la actividad 1.

Ahora solo concursan Juan y Luis, y se reparten 20 puntos de acuerdo con el número de objetos que cada uno saca de la alberca. Juan extrajo tres objetos y Luis dos.

a) En total, ¿cuántos objetos sacaron de la alberca entre los dos?

b) En la recta, colorea de rojo la parte de los objetos extraídos de la alberca que corresponde a Juan, y en azul la parte de los objetos que corresponde a Luis.



c) ¿Qué fracción del total representan los objetos que sacó Juan?

¿Qué fracción de los 20 puntos le corresponde?

Entonces, ¿cuántos puntos se le asignan a Juan?

d) ¿Qué fracción del total representan los objetos que sacó Luis?

¿Qué fracción de los 20 puntos le corresponde?

Entonces, ¿cuántos puntos se le asignan a Luis?

e) Suma los puntos asignados a Juan más los asignados a Luis. Si el resultado no es 20, vuelve a revisar tus respuestas en los cuatro incisos anteriores, encuentra el error y corrige.

Después concursan Pablo, Andrés y Saúl, y se reparten 45 puntos de acuerdo con el número de objetos que cada uno saca de la alberca.

f) Si Pablo extrae cuatro objetos, Andrés dos y Saúl tres, ¿cuántos puntos le corresponden a cada uno?

Pablo: Andrés: Saúl:

g) Explica qué hiciste para calcular los puntos de cada concursante. ____________

____

____

Reúnete con otro estudiante y revisen sus trabajos, comparen sus procedimientos y analícenlos. Juntos revisen de nuevo sus tablas y sus respuestas de la actividad 1. Si detectan algún error, corríjanlo. Si hay diferencias, analícenlas y lleguen a un acuerdo.

3. Lee la situación y haz lo que se pide.

Eli y Olga compraron un billete de lotería que salió premiado con $1 350 000. Se repartirán el premio de acuerdo con lo que aportó cada una al comprar el billete, el cual les costó $3 600.

a) En la tabla se muestran distintos escenarios de la parte que pudo haber puesto cada una para comprar el billete y la parte del premio que le correspondería. Complétala.

	Escenario 1		**Escenario 2**		**Escenario 3**	
Parte del billete que pagó	Eli $\frac{1}{2}$	Olga $\frac{1}{2}$	Eli $\frac{2}{3}$	Olga $\frac{1}{3}$	Eli $\frac{2}{5}$	Olga $\frac{3}{5}$
Cantidad que pagó por el billete ($)						
Cantidad que le toca del premio ($)						

b) Para cada escenario, calcula el cociente que se indica.

Escenario 1:

$\frac{\text{Cantidad del premio para Eli}}{\text{Pagó por el billete}} =$ __________ $=$ __________

$\frac{\text{Cantidad del premio para Olga}}{\text{Pagó por el billete}} =$ __________ $=$ __________

Escenario 2:

$\frac{\text{Cantidad del premio para Eli}}{\text{Pagó por el billete}} =$ __________ $=$ __________

$\frac{\text{Cantidad del premio para Olga}}{\text{Pagó por el billete}} =$ __________ $=$ __________

Escenario 3:

$\frac{\text{Cantidad del premio para Eli}}{\text{Pagó por el billete}} =$ __________ $=$ __________

$\frac{\text{Cantidad del premio para Olga}}{\text{Pagó por el billete}} =$ __________ $=$ __________

c) ¿Hay una relación directamente proporcional entre las cantidades que se pagan por el billete y las cantidades que corresponden del premio? ______

Explica por qué. ______

______

d) Sustituye los valores correspondientes y haz los cálculos de acuerdo con el escenario 3. Considera que x representa los integrantes del reparto.

$$\frac{\text{Cantidad total a repartir}}{\text{Cantidad total que se pagó por el billete}} = \frac{\text{Cantidad del premio para } x}{\text{Lo que pagó } x \text{ por el billete}}$$

Sustituciones

En el caso de Olga: ______

En el caso de Eli: ______

e) ¿Por qué se cumplen las igualdades anteriores? ______

______

f) Si lo que dio Olga para comprar el billete fue \$1742.75 y Eli puso lo demás, plantea igualdades como las del inciso *d* para determinar la cantidad del premio que le corresponde a cada una.

Olga: ______

Eli: ______

- Compara tu trabajo con el de otros estudiantes. Si hay diferencias, analícenlas y lleguen a un acuerdo.

4. En equipos, analicen el problema y hagan lo que se solicita.

Gabriel, David y Rodrigo hicieron un trabajo por el que recibieron un pago de \$2 700. David trabajó seis horas, Gabriel ocho y Rodrigo cuatro horas. Quieren repartirse el dinero de forma que cada uno reciba la parte correspondiente al número de horas trabajadas.

a) Discutan y lleguen a un acuerdo sobre la manera en que van a resolver el problema. Describan su decisión.

______

______

b) ¿Cuánto dinero le corresponde a cada uno?

David: ______

Gabriel: ______

Rodrigo: ______

- Expongan su trabajo ante el grupo y escuchen lo que hicieron sus compañeros. Vean cuántos procedimientos diferentes encontraron en el grupo para resolver el problema. Analícenlos y discutan si son equivalentes y por qué.

Convivo en armonía

Un **reparto** es **directamente proporcional** cuando se reparte una cantidad C en varias partes bajo ciertas condiciones o valores iniciales; cada parte recibe una cantidad directamente proporcional al valor inicial que le corresponde, de acuerdo con la siguiente relación.

$$\frac{\text{Cantidad total a repartir}}{\text{Suma de los valores iniciales}} = \frac{\text{Parte que le corresponde a } x}{\text{Valor inicial correspondiente a } x}$$

Al tratarse de un reparto directamente proporcional, a mayor valor inicial de una parte le corresponde mayor cantidad en el reparto.

El cociente $\frac{\text{Cantidad total a repartir}}{\text{Suma de los valores iniciales}}$ recibe el nombre de **valor unitario**. Representa la parte que corresponde a una unidad de la suma de los valores iniciales.

Por ejemplo, tres personas A, B y C compran un terreno de 1200 m². Para comprarlo, A puso \$142 500, B dio \$228 000 y C aportó \$199 500. Se reparten el terreno de forma directamente proporcional a lo que cada uno contribuyó.

- La cantidad por repartir es 1200 m².
- Las cantidades o valores iniciales son: A: \$142 500, B: \$228 000, C: \$199 500.
- La suma de los valores iniciales es \$570 000.

Por ser un reparto directamente proporcional, se satisface que...

$$\frac{1200}{570000} = \frac{\text{Parte que le corresponde a A}}{142500}$$

Despejando la parte que le corresponde a A, se tiene:

$$\frac{1200\,(142500)}{570000} = 300 \text{ m}^2$$

Hacemos lo mismo para determinar lo que le toca a B:

$$\frac{1200}{570000} = \frac{\text{Parte que le corresponde a B}}{228000}, \text{ entonces: } \frac{1200\,(228000)}{570000} = 480 \text{ m}^2$$

Y a C le toca:

$$\frac{1200}{570000} = \frac{\text{Parte que le corresponde a C}}{199500}, \text{ entonces: } \frac{1200\,(199500)}{570000} = 420 \text{ m}^2$$

Comprobamos que la suma de lo que se reparte es igual a la cantidad por repartir:

$$300 + 480 + 420 = 1200 \text{ m}^2$$

Lo anterior es equivalente a multiplicar el valor unitario $\frac{1200}{570000}$ por cada una de las condiciones o valores iniciales.

$$\text{A:}\left(\frac{1200}{570000}\right)142500 = 300; \qquad \text{B:}\left(\frac{1200}{570000}\right)228000 = 480;$$

$$\text{C:}\left(\frac{1200}{570000}\right)199500 = 420$$

¿Vamos bien?

Resuelve los problemas. Al terminar, compara tus procedimientos y tus resultados con los de tus compañeros.

I. Sandra, Miguel y Édgar compraron un paquete de historietas con 147 ejemplares. Se los reparten de forma proporcional a la parte que cada uno pagó. Sandra puso $\frac{2}{7}$ partes, Miguel $\frac{1}{7}$ parte y Édgar $\frac{4}{7}$ partes. ¿Cuántas revistas le toca a cada uno? ______________________________

____

Sandra: ____________ Édgar: ____________ Miguel: ____________

II. Rubén, Horacio y Ernesto trabajan en una carpintería. Entregaron un pedido por el que recibieron un pago de $25 800. Se lo van a repartir de acuerdo con el número de horas que trabajó cada uno. Rubén trabajó 15 horas, Horacio 20 y Ernesto 25 horas. ¿Cuánto le toca a cada uno?

____

____

Rubén: ____________ Horacio: ____________ Ernesto: ____________

5. Analiza el texto y haz lo que se pide.

En una clase, la maestra plantea el siguiente problema:

Tres hermanos fueron a una excursión. Al terminar la comida, se repartieron en partes iguales ocho barritas de amaranto, de las cuales Cintia puso cinco y Tere tres. Sebastián no aportó nada porque no tenía. En agradecimiento, Sebastián les dio ocho pesos a sus hermanas para que se los repartieran.

La maestra preguntó: "¿Cómo deben repartirse las monedas entre Cintia y Tere para que la distribución sea equitativa?". Hubo dos respuestas:

Claudia propuso que Cintia se debía quedar con cinco pesos y Tere con tres.

Lola sugirió que cada una tenía que tomar cuatro pesos.

a) ¿Es equitativa la distribución que propuso Claudia? ____________ Explica por qué.

____

____

b) ¿Es equitativa la distribución sugerida por Lola? ____________ Explica por qué.

____

____

c) ¿Qué fracción de las barras de amaranto se comió cada uno de los tres hermanos?

____

d) ¿Cuántos tercios hay en las cinco barras que puso Cintia? _______________

¿Cuántos de esos tercios se comió Cintia? _______________

¿Cuántos de esos tercios le dio Cintia a Sebastián? _______________

e) ¿Cuántos tercios hay en las tres barritas que puso Tere? _______________

¿Cuántos de esos tercios se comió ella? _______________

¿Cuántos de esos tercios le dio a su hermano? _______________

f) Si Cintia y Tere se reparten los ocho pesos de forma directamente proporcional a la cantidad de barritas que cada una le dio a Sebastián, ¿cómo debe hacerse la repartición? _______________

____

g) ¿Qué opinas ahora de las propuestas de Claudia y Lola? _______________

____

- Compara tus respuestas con las de otros estudiantes. Con ayuda del profesor revisen que no haya errores, y si los hay, corríjanlos.

6. Reúnete con un compañero, analicen la situación y realicen lo que se solicita.

Karen y Alexis invirtieron sus ahorros en una cuenta bancaria. A un año de la inversión cerraron la cuenta y les regresaron $13 695, lo que incluía las utilidades. Decidieron repartírselo de acuerdo con lo que cada uno puso al abrir la cuenta. Karen aportó $3 750 y Alexis dio $4 550.

a) ¿Cuál es la cantidad total con la que abrieron la cuenta? _______________

¿Cuánto les regresaron por cada peso que invirtieron? _______________

b) Usen la información del inciso anterior para calcular la cantidad que le corresponde a cada uno.

Karen: _______________

Alexis: _______________

Comparen sus respuestas, sus procedimientos y sus cálculos con los de otros estudiantes. Si hay diferencias, usen argumentos para decidir quién está en lo correcto.

7. Analiza el texto y haz lo que se pide.

Se repartieron 700 pasteles en cuatro expendios: A, B, C y D, en partes proporcionales a $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{4}$, respectivamente.

a) ¿Cuánto suman las proporciones? _______________

b) ¿Cuántos pasteles se entregaron en cada expendio?

A: ______________________________

B: ______________________________

C y D: ______________________________

Compara tus respuestas con las de tus compañeros y analicen los procedimientos que emplearon.

¿Qué aprendí?

Resuelve los problemas; desarrolla todos los procedimientos. Al terminar, revisa tu trabajo, primero con ayuda de tus compañeros y luego con tu profesor. Si encuentran errores, corríjanlos.

1. En un poblado hay tres escuelas. El municipio reparte 1615 cajas de material didáctico de forma proporcional al número de estudiantes de cada escuela. En la escuela A hay 830 alumnos, en la B son 950 y en la C, 1450 educandos. ¿Cuántas cajas se reciben en cada escuela?

   A: ______________________________

   B: ______________________________

   C: ______________________________

2. En una tienda de zapatos hay una promoción: "Llévese dos pares y pague solamente uno". María y Lalo deciden aprovechar la oferta. Los zapatos que escoge María cuestan \$350 y los de Lalo, \$200. Al final, pagan \$350 por ambos pares.

   a) ¿Cuánto debe poner cada uno si el pago se hace proporcional a lo que cuestan los zapatos que eligieron? ______________________________

   b) ¿Cuánto ahorró cada uno gracias a la promoción? ______________________________

3. Se repartieron \$2 300 entre cuatro hermanos de forma proporcional a sus edades. Al primero le tocaron \$900, al segundo \$600, al tercero y cuarto, que son gemelos, les tocaron \$400. La suma de las edades de los hermanos es 46. ¿Qué edad tiene cada uno?

   Edad del hermano mayor: ______________________________

   Edad del segundo hermano: ______________________________

   Edad de cada gemelo: ______________________________

Marca con una ✓ la casilla que describe tu desempeño.

Resuelvo problemas de reparto proporcional.		
Nivel de logro	A	Requiero ayuda para realizarlo.
	B	Lo hago, pero en ocasiones necesito ayuda.
	C	Lo hago de manera autónoma.

Secuencia didáctica 22

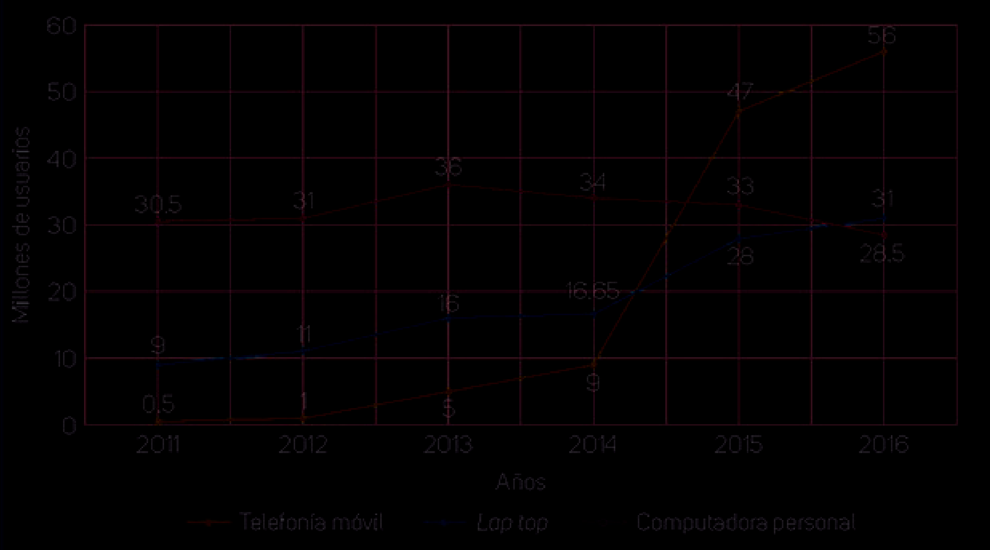
Aprendizaje esperado: Recolectarás, registrarás y leerás datos en histogramas, polígonos de frecuencia y gráficas de línea.
Contenido: Recolectarás, registrarás y leerás datos en gráficas de línea.

Entre otras líneas

1. Trabaja individualmente esta actividad.

En el año 2017, la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE) publicó un estudio sobre telecomunicaciones y radiodifusión en México. Una parte del estudio se dedica a la extensión del uso de internet en nuestro país. En ese estudio se publica una gráfica como la siguiente. Analízala y responde.

Usuarios individuales de internet por tipo de equipo



Fuente: dx.doi.org/10.1787/9789264280656-es (consulta: 4 de abril de 2018). Elaboración propia estimando los datos a partir de Inegi (2017a), Encuesta Nacional sobre Disponibilidad y Uso de Tecnologías de la información en los Hogares (ENDUTIH), 206. Citado por la OCDE en *Estudio de la OCDE sobre telecomunicaciones y radiodifusión en México 2017*. Ediciones OCDE, 2017, París.

a) ¿Qué dispositivos digitales se comparan en la gráfica? ______

______

b) ¿Qué representan los números del eje horizontal? ______

c) ¿Qué representan los números del eje vertical? ______

______

d) ¿En qué años el número de usuarios de telefonía móvil se mantuvo debajo de los 10 millones? ______

e) ¿Qué equipo fue el que menos se usó para conectarse a internet en el año 2011? ______ ¿Y el que más se usó? ______

f) ¿El número de personas que usaron teléfonos móviles durante 2016 fue mayor a cuántos millones? ______ ¿Y menor a cuántos? ______

______

g) ¿En qué años consideras que creció más el número de usuarios de teléfonos móviles? ________________ Explica tu respuesta. ________________________

____

____

h) ¿En qué años consideras que creció menos? ________________ Explica tu respuesta. ____

____

i) ¿Entre cuántos millones varió el número de usuarios de *lap top* durante los seis años? Más de: ________________ Menos de: ________________

¿Y el número de usuarios de computadora?

Más de: ________________ Menos de: ________________

j) ¿En qué años los usuarios de *lap top* fueron más que los usuarios de teléfonos móviles? ____

k) ¿Cuál de los tres dispositivos se ha mantenido entre los 20 y los 40 millones de usuarios? ____

l) ¿A partir de qué año se empieza a reducir el número de usuarios de computadora? ________________ Explica tu respuesta. ________________________

____

m) ¿En algún momento se reduce el número de usuarios de *lap top* o de teléfonos móviles? ________ Explica tu respuesta. ________________________

____

n) ¿En qué años los usuarios de computadora personal fueron más que los usuarios de los otros dos dispositivos? ________________________________

o) Compara cómo ha crecido el número de usuarios de los tres dispositivos y redacta una conclusión sobre eso. Argumenta tus afirmaciones.

____

____

____

____

____

Compara tus respuestas y tu conclusión con las de otros estudiantes. Si hay diferencias, discútanlas con argumentos.

2. Analiza la información con un compañero y hagan lo que se indica.

En los primeros días de enero de 2018, circulaba la noticia de que, en nuestro país, el año 2017 había terminado "con la inflación más alta en los últimos 17 años". Un medio de comunicación digital publicó la tabla de la siguiente página.

Inflación* anual en México (2000-2017)

2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
8.96	4.4	5.7	3.98	5.19	3.31	4.05	3.76	6.53

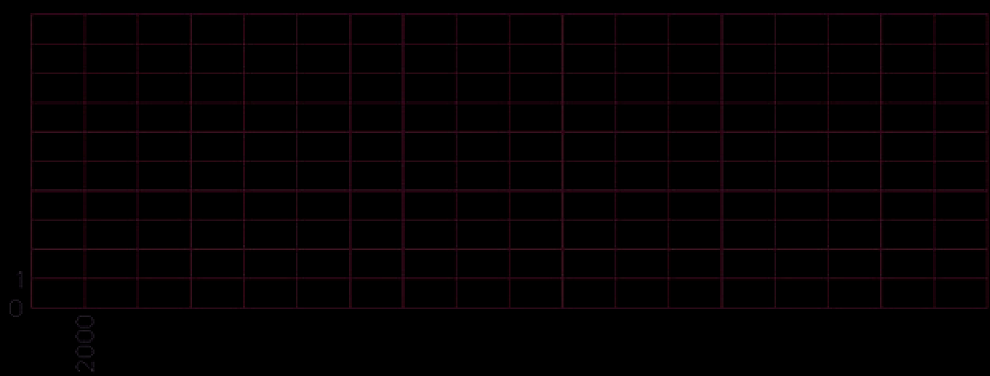
2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
3.57	4.40	3.82	3.57	3.97	4.08	2.13	3.36	6.77

Fuente: [illegible] (consulta: 25 de marzo de 2018). Animal Político, 9 de enero de 2017.

*De acuerdo con el Banco de México: "La inflación es el aumento sostenido y generalizado de los precios de los bienes y servicios de una economía a lo largo del tiempo" ([illegible]) (consulta: 25 de marzo de 2018).

a) ¿En qué años la inflación estuvo arriba de 6%? ____________________

b) En el siguiente espacio, tracen la gráfica correspondiente a los datos de la tabla anterior. En el eje horizontal, pongan los años. Como altura de cada año, pongan el porcentaje de la inflación correspondiente a ese año. Al final, unan con segmentos de recta todas las alturas, de forma consecutiva año con año. Coloquen el nombre de los ejes y el título de la gráfica.



c) ¿Cuál fue la inflación más alta en todos esos años? __________ ¿Y la más baja? ____________________

d) ¿De qué forma les resulta más fácil analizar los datos: en la tabla o en la gráfica? ____________________ ¿Por qué? ____________________

____

e) Comparen el porcentaje de inflación año con año. ¿En qué año fue mayor la inflación: en 2012 o en 2013? __________ ¿Y en 2013 o en 2014? __________ ¿Y en 2014 o en 2015? ____________________

f) Después de 2015, ¿en algún año la inflación fue menor que la del año anterior?

____

g) ¿En qué años se mantuvo la inflación anual entre 2% y 4%?

____

¿En qué años no se cumplió ese objetivo? ______________________

____

h) Discutan y lleguen a un acuerdo sobre si es posible construir un polígono de frecuencias para analizar los datos, de forma que se puedan responder preguntas como las anteriores. Redacten su conclusión y arguméntenla.

____

____

Glosario

polígono de frecuencias.

Comparen su trabajo con el de sus demás compañeros. Si hay diferencias, analícenlas y argumenten para decidir quién está en lo correcto.

Las **gráficas de línea** están formadas por segmentos de recta consecutivos.

Estas gráficas se usan para comparar los valores de las variables respecto a algún criterio y mostrar tendencias (patrones de comportamiento) por lo general en relación con el tiempo. En el eje vertical se coloca la variable que se mide y en el horizontal, el criterio considerado. Si el criterio es el tiempo, a cada periodo se le pone como altura el valor de la variable que corresponde a ese momento. Las alturas se unen con segmentos de recta de forma consecutiva.

3. Analiza la gráfica y responde.

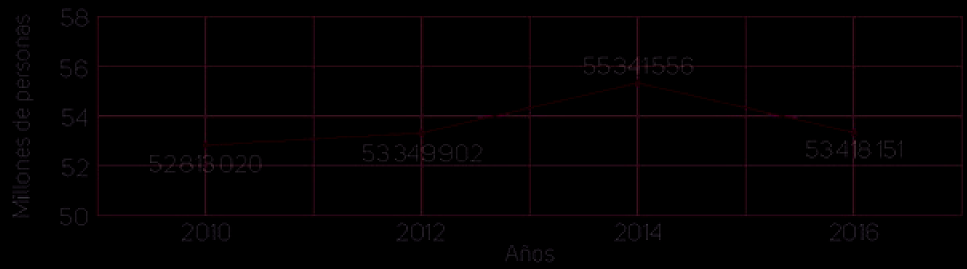
Fuente: dx.doi.org/10.1787/9789264280656-es (consulta: 4 de abril de 2018). Elaboración propia estimando los datos a partir de IFT (2019a), *Cuarto informe trimestral estadístico 2016*, https//bit.ift.org.mx. Citado por la OCDE en *Estudio de la OCDE sobre telecomunicaciones y radiodifusión en México 2017*. Ediciones OCDE, París.

¿Los ingresos de la televisión restringida se han mantenido en aumento a lo largo de los años considerados en la gráfica? _____ ¿Qué aspecto de la gráfica le permite llegar a esa conclusión? ____

Compara tus respuestas con las de otros estudiantes. Si hay algún desacuerdo, analícenlo y lleguen a un consenso.

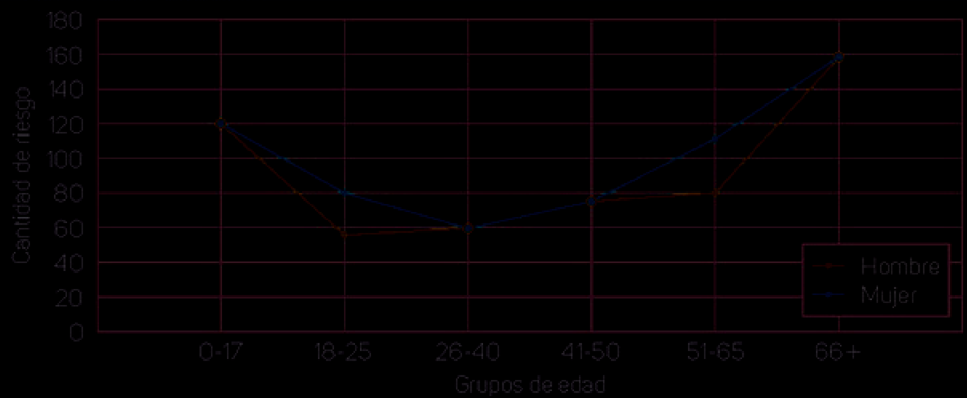
4. En parejas, analicen las gráficas y respondan.

Gráfica A. Número de personas en situación de pobreza en México, 2010-2016



Fuente: [illegible] (consulta: 25 de marzo de 2018). Estimaciones del Coneval con base en el MCS-ENIGH 2010, 2012, 2014 y el MEC-ENIGH 2016. Comunicado de prensa del Coneval núm. 99, *Evolución de la pobreza*, 30 de agosto de 2017.

Gráfica B. Riesgo relativo de pobreza* de hombres y mujeres por grupo de edad en México



*El riesgo relativo de pobreza es la tasa de pobreza específica por edad entre hombres y mujeres dividida por la tasa de pobreza en toda la población y posteriormente multiplicada por 100.

Fuente: Elaboración propia, con datos de la OCDE.

Fuente: [illegible] (consulta: 25 de marzo de 2018). *Riesgo del aumento de pobres de 0 a 18 años de edad*, Forbes, 19 de agosto de 2015.

a) ¿Qué diferencias encuentran entre las variables del eje horizontal de las dos gráficas? ____

____

____

b) ¿Cuál de las gráficas es una gráfica de línea: la A o la B? ____________

Expliquen por qué. ____

c) ¿Cuál de las gráficas es un polígono de frecuencias? ________ Expliquen por qué. ____

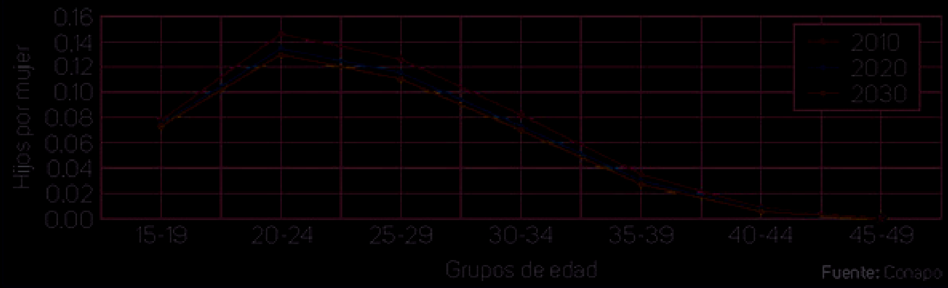
- Comparen sus respuestas con las de otros estudiantes. Si hay algún desacuerdo, analícenlo y, con ayuda del profesor, lleguen a un consenso.

¿Vamos bien?

Haz lo que se indica a partir de lo que has aprendido. Al terminar, compara tus argumentos con los de tus compañeros.

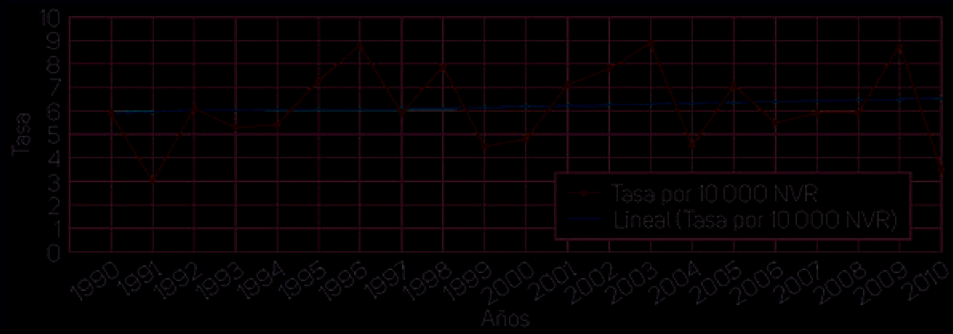
Determina cuál es una gráfica de línea y cuál no. Escribe tus argumentos en tu cuaderno.

a) **Tasas específicas de fecundidad en Tlaxcala, 2010, 2020 y 2030**



Fuente: (consulta: 25 de marzo de 2018). Tomado de *Plan Nacional de Desarrollo. Tlaxcala, 2017-2021.*

b) **Evolución de la tasa de mortalidad en el estado de Morelos de 1990 a 2010**



Fuente: (consulta: 25 de marzo de 2018). Tomado de PROGRAMA SECTORIAL DE SALUD 2013-2018, Consejería Jurídica, Morelos, Poder Ejecutivo, 2014.

5. Analiza la tabla y haz lo que se indica.

El intercambio comercial Polonia-México (millones de dólares)

Año	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
Exportaciones de Polonia a México	64.3	104.4	53.0	76.5	89.3	81.2	120.8	148.7	254.6
Importaciones a Polonia desde México	76.3	84.1	97.1	124.7	120.2	178.1	203.7	280.3	392.3

Año	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
Exportaciones de Polonia a México	155.9	267.4	432.4	566.3	523.7	496.9	654.5	447.6
Importaciones a Polonia desde México	222.7	296.8	359.6	344.2	371.0	420.5	550.1	448.7

Fuente: [illegible] (consulta: 25 de marzo de 2018). Ministerio de Desarrollo Económico de Polonia. Citado por *El comercio del conocimiento: economía del siglo XXI*. Revista del Comercio Exterior, Bancomext. Nueva Época, número 9, enero-marzo de 2017.

Glosario

exportación.

importación.

a) Traza la gráfica de lo que Polonia exportó a México durante los años indicados. Agrega el nombre de los ejes y el título de la gráfica. En el mismo plano traza la gráfica de lo que Polonia importó.

b) ¿Observas alguna tendencia en la diferencia entre lo que Polonia exporta a México y lo que importa desde México? Escribe tus conclusiones.

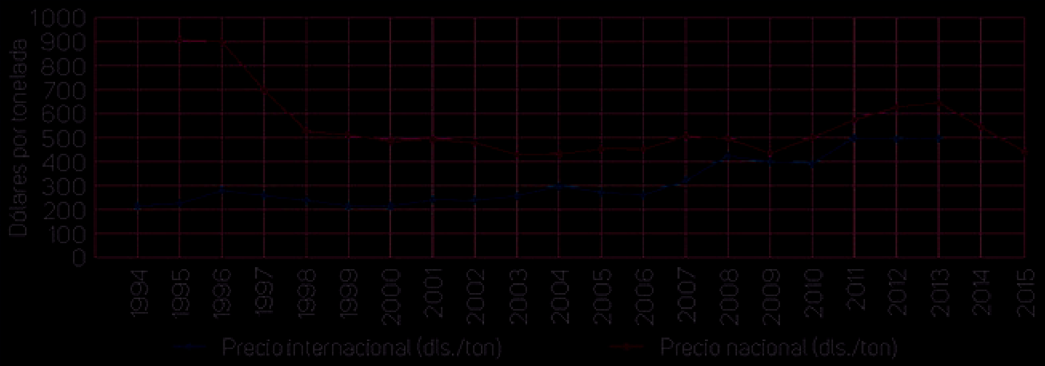
Compara tu gráfica y la forma en que la trazaste con las de otros estudiantes. Si tienen diferencias y no llegan a un acuerdo, acudan al profesor.

¿Qué aprendí?

Haz lo que se indica. Al terminar, revisa tus procedimientos y resultados, primero con ayuda de tus compañeros y luego con tu profesor. Corrige si es necesario.

1. Analiza la gráfica y contesta.

Precios de la harina de maíz



Fuente: Elaboración propia con base en datos de la FAO, de Banxico y del Inegi.

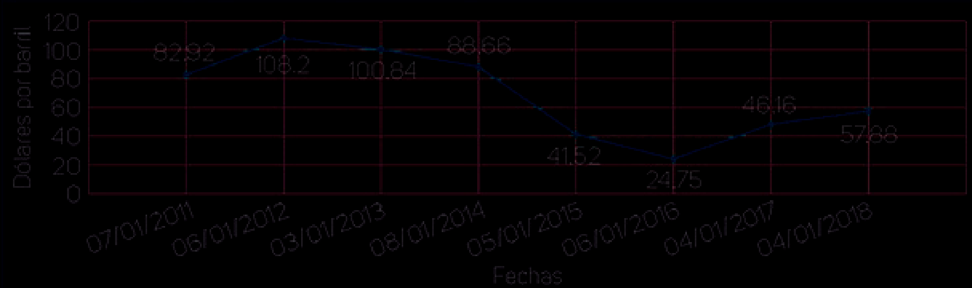
Fuente: [illegible] (consulta: 25 de marzo de 2018). Tomado de *El mercado de harina de maíz en México. Una interpretación microeconómica*. Economia Informa, número 405, julio-agosto de 2017.

a) ¿Cuál precio varió más a lo largo de los años indicados en la gráfica: el nacional o el internacional? ____________

b) ¿Los precios nacionales de la harina de maíz tienden a alejarse o a acercarse a los internacionales? ____________

2. Observa la gráfica y responde.

Precio spot (vigente) del petróleo (mezcla mexicana)



Fuente: [illegible] (consulta: 8 de abril de 2018). Elaboración propia con base en datos del Banco de México.

a) ¿De qué año a qué año se mantuvo a la baja el precio del petróleo?

____

b) ¿Cuál fue el menor precio alcanzado? ____________

Marca con una ✓ la casilla que describe tu desempeño.

Contenido		
Recolecto, registro y leo datos en gráficas de línea.		
Nivel de logro	A	Requiero ayuda para realizarlo.
	B	Lo hago, pero en ocasiones necesito ayuda.
	C	Lo hago de manera autónoma.

Taller de tecnología

Gráficas de línea

Abre una hoja de cálculo. Es recomendable que, antes de empezar a trabajar, explores el programa (y las opciones de cada comando) para que te familiarices con él.

Sigue las instrucciones para crear una gráfica de línea.

a) Analiza los datos de la tabla.

Cotización del dólar (Tipo de cambio interbancario)
Valor a la venta el último día hábil del mes de enero de cada año

2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
12.12*	12.95	12.71	13.37	14.84	18.29	21.02	18.62

Fuente: dof.gob.mx/indicadores.php (consulta: 30 de marzo de 2018). Elaboración propia con datos de "Tipo de cambio y tasas", en *Diario Oficial de la Federación*, Secretaría de Gobernación, México.
*Los datos originales se redondearon a dos cifras decimales.

b) En la columna A ingresa los años de la tabla y en la B, el precio del dólar, como se muestra en la imagen 1. Primero escribe el encabezado de cada columna.

c) Coloca el cursor en la casilla A2, donde ingresaste el primer año; mantén presionada la tecla "Mayúscula" y, con las teclas de flecha, a la derecha y hacia abajo, desplázate para ir seleccionando todos los datos (una forma de hacerlo rápido es manteniendo presionado el botón izquierdo del ratón y arrastrándolo para seleccionar todos los datos).

Asegúrate de que todos los datos queden marcados con un fondo azul o gris, como en la imagen 2.

Imagen 1

Imagen 2

d) Elige "Insertar" / "Gráfico" / "Línea" (o en "Insertar" / "Gráficos de línea", da clic en la opción "Más gráficos de líneas", según la versión). En el cuadro de diálogo que se despliega, selecciona "Línea con marcas" (o "Línea con marcadores", según la versión).

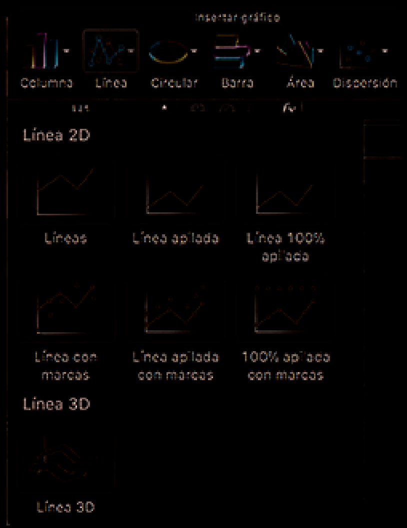


Imagen 3

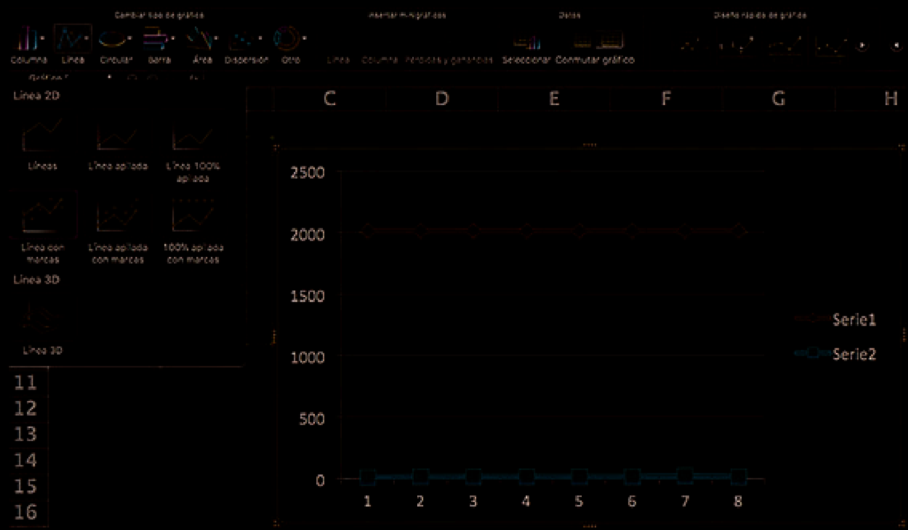


Imagen 4

Da clic derecho en la gráfica y elige "Seleccionar datos". En el cuadro de diálogo que aparece, da clic en la celda de "Etiquetas de eje de categoría (X)" y selecciona los valores de la columna de "Año" y da clic en "Aceptar". Haz lo mismo para "Valores de Y", pero selecciona los valores de la columna de "$" y da clic en "Aceptar" (imagen 5). En ese mismo cuadro puedes desactivar la serie 2 al seleccionarla y dar clic en "Quitar".

Imagen 5

Ubícate en alguna parte de la línea de la gráfica y da clic derecho, elige "Formato de serie de datos". En el cuadro de diálogo que aparece (imagen 6 de la siguiente página) puedes elegir el color de la línea y la forma, tamaño y color del marcador.

Imagen 6

Imagen 7

e) Coloca el cursor en cualquier parte del área gráfica y da clic izquierdo; en las opciones que aparecen en la parte superior, elige "Diseño del gráfico". Verás distintos elementos que puedes agregar a la gráfica (imagen 8).

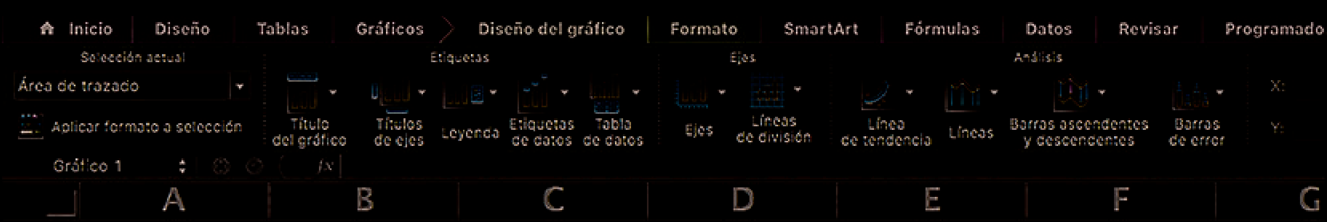


Imagen 8

Imagen 9

Elige cada uno de ellos y observa los cambios en la gráfica. Selecciona: "Ejes", "Título de ejes", "Título del gráfico", "Etiquetas de datos" y "Líneas de división". Aparecerán los valores de cada dato sobre los puntos que le corresponden.

f) Coloca el cursor sobre cualquier año y presiona el botón derecho del ratón. Selecciona "Dar formato a eje"; se despliegan las opciones para el formato del eje horizontal. Elige la opción "Fuente". Se abrirá un cuadro de diálogo como el de la imagen 9. En "Fuente", elige "Arial". En "Tamaño de la fuente", elige el tamaño de la letra, puede ser de 12 o 14 puntos. De la misma forma, cambia el formato del eje vertical, el título y los títulos de los ejes.

g) Coloca el cursor en el centro del borde derecho o izquierdo del área de la gráfica, hasta que aparezca el deslizador ⟺. Presiona el botón izquierdo y arrastra el ratón a la derecha (o a la izquierda si colocaste el cursor en el borde izquierdo) para hacer más ancha el área gráfica y evitar que se encimen los datos.

Imagen 10

h) Coloca el cursor sobre "Título del gráfico". Escribe "Precio de venta del dólar (enero, fin de mes)". En "Título del eje" vertical, escribe "Pesos", y en el horizontal escribe "Años".

i) Si en la gráfica no aparecen todos los años, coloca el cursor sobre cualquier año, presiona el botón derecho y elige la opción "Dar formato a eje" (imagen 12). Se abre una ventana como la de la imagen 13. Escribe "1" en "Intervalo entre etiquetas" y da clic en "Aceptar".

Imagen 11

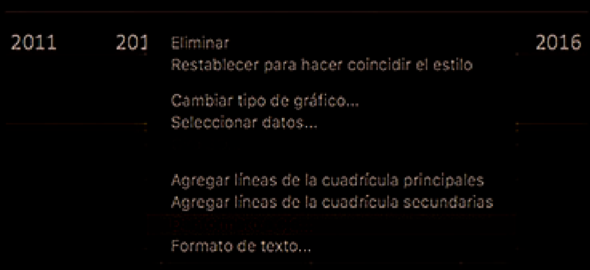


Imagen 12

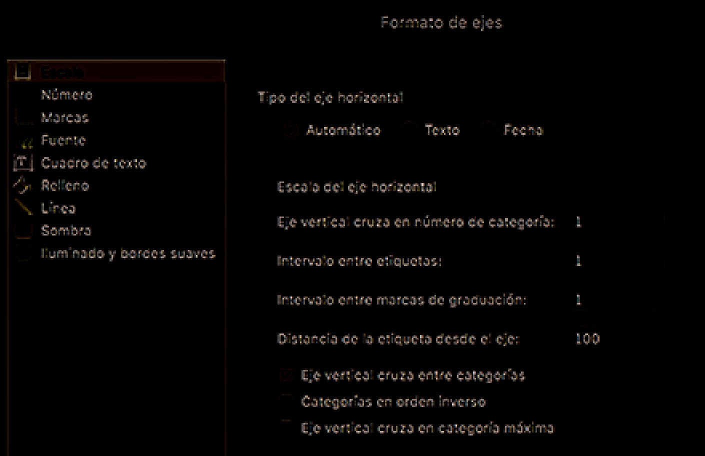


Imagen 13

j) Analiza la gráfica y escribe los aspectos que llamen tu atención sobre la variación del precio del dólar en los últimos siete años.

k) ¿Consideras que el precio del dólar tiende a mantenerse, a subir o a bajar? Explica por qué.

Elige la opción correcta. Con base en tus resultados, identifica los contenidos que necesitas repasar para mejorar tu desempeño.

1. ¿En cuál opción se relaciona la operación con el número escrito como una sola potencia?

Operación		Como una sola potencia	
I. $10^4 \div 5^4$	IV. $-2^4(1)^4$	a) 3^6	d) -2^4
II. $(-9)^6 \div 3^6$	V. $[(-3)^4]^3 \div [(-3)^3]^3$	b) -3^3	e) 3^3
III. $12^3 \div (-4)^3$	VI. $(5^2)^5 \div [(-5)^3]^2$	c) 2^4	f) 5^4

A) I-a, II-b, III-d, IV-c, V-a, VI-c

B) I-f, II-b, III-a, IV-d, V-e, VI-d

C) I-c, II-a, III-b, IV-d, V-b, VI-f

D) I-d, II-a, III-b, IV-c, V-e, VI-f

2. ¿En cuál opción se relaciona cada expresión con su reducción a una sola potencia?

Expresión		Reducción a una sola potencia	
I. $x^8 \div x^6$	IV. $(-x)^7 \div (-x^2)^2$	a) x^4	d) x^3
II. $(x^6 \times x^4) \div x^7$	V. $(x^4 \div (-x)^3)x$	b) $-x^3$	e) x^2
III. $x^8 \div (-x)^6$	VI. $(x^2)^5 \div [(-x)^3]^2$	c) $-x^4$	f) $-x^2$

A) I-a, II-d, III-f, IV-d, V-e, VI-a

B) I-e, II-d, III-e, IV-b, V-f, VI-a

C) I-e, II-a, III-b, IV-d, V-f, VI-c

D) I-a, II-a, III-f, IV-b, V-e, VI-c

3. Los siguientes números están escritos en notación científica. ¿Cuántas cifras decimales y cuántas cifras enteras tiene cada número?

a) 3.2×10^{-9} b) 7.27×10^{-19} c) 3.2×10^{23} d) 1.234×10^{54}

A) a) 8 decimales, b) 17 decimales, c) 24 cifras enteras, d) 57 cifras enteras

B) a) 9 decimales, b) 18 decimales, c) 22 cifras enteras, d) 51 cifras enteras

C) a) 10 decimales, b) 20 decimales, c) 21 cifras enteras, d) 56 cifras enteras

D) a) 10 decimales, b) 21 decimales, c) 24 cifras enteras, d) 55 cifras enteras

4. ¿Cuál es el resultado de la suma de las áreas de los polígonos regulares?

A) $258.56\ cm^2$ B) $129.28\ cm^2$ C) $48.82\ cm^2$ D) $24.41\ cm^2$

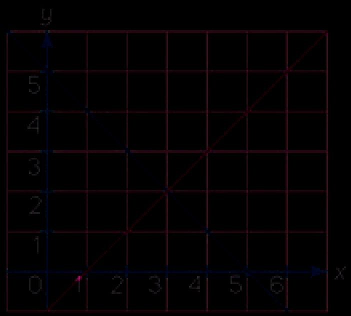
5. ¿Cuánto debe valer a para que el sistema tenga infinidad de soluciones?

$$\begin{cases} 2x + 2y = 6 \\ 4x + 4y = a \end{cases}$$

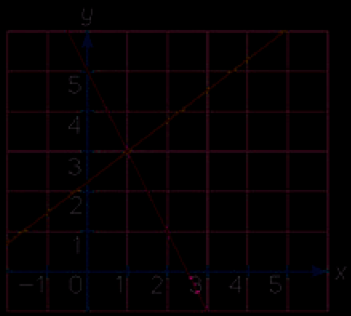
A) 4 B) 3 C) 12 D) 2

6. ¿En cuál opción se relaciona la gráfica con el sistema de ecuaciones que le corresponde?

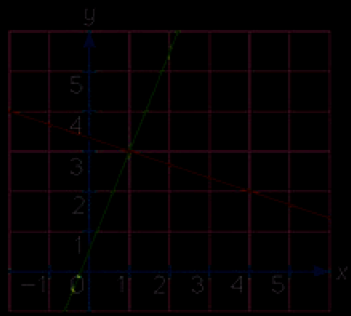
I. $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 3x - 4y = -9 \end{cases}$ II. $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$ III. $\begin{cases} x + 3y = 10 \\ -5x + 2y = 1 \end{cases}$



Gráfica 1



Gráfica 2



Gráfica 3

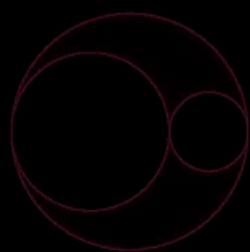
A) Gráfica 1 con sistema I, gráfica 2 con sistema II, gráfica 3 con sistema III

B) Gráfica 1 con sistema I, gráfica 2 con sistema III, gráfica 3 con sistema II

C) Gráfica 1 con sistema II, gráfica 2 con sistema III, gráfica 3 con sistema I

D) Gráfica 1 con sistema II, gráfica 2 con sistema I, gráfica 3 con sistema III

7. ¿Cuál es el área de la parte coloreada en la figura de la derecha si el círculo más pequeño tiene radio de 4 cm y el círculo mediano tiene radio de 8 cm? Considera $\pi = 3.1416$.



A) 341.2664 cm² B) 37.6992 cm² C) 201.0624 cm² D) 552.9216 cm²

8. Tres pintores expusieron sus obras y, por las ventas de entradas, juntaron $79 025. Entonces decidieron repartirse el dinero de acuerdo con el número de pinturas que cada uno presentó. Jesús expuso 12, Marco 7 y Leo 10. ¿Qué cantidad del dinero le toca a cada uno por la venta de entradas?

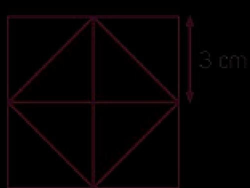
A) Jesús: $32 700, Marco: $19 075 y Leo: $27 250

B) Jesús: $26 342, Marco: $26 341.30 y Leo: $26 341.70

C) Jesús: $52 683.30, Marco: $8 780.56 y Leo: $17 561.14

D) Jesús: $47 415, Marco: $23 707.50 y Leo: $7 902.50

9. ¿Cuál es el área del cuadrado azul y cuál es la longitud de cada uno de sus lados?



A) Área: $\frac{9}{2}$ cm² y Lado: $\frac{3}{\sqrt{2}}$ cm

B) Área: 12 cm² y Lado: $\sqrt{12}$ cm

C) Área: 18 cm² y Lado: 9 cm

D) Área: 18 cm² y Lado: $\sqrt{18}$ cm

Giro ascendente

Resuelve los problemas. Con base en tus resultados, identifica los contenidos que necesitas repasar para mejorar tu desempeño.

1. Omar, Rodrigo y Javier aportaron \$96, \$48 y \$108, respectivamente, para comprar una caja de gelatinas. La caja contiene 21 gelatinas. ¿Cuántas gelatinas le tocan a cada uno de acuerdo con el dinero que aportaron?

   Omar: ____________________

   Rodrigo: ____________________

   Javier: ____________________

2. Un terreno rectangular tiene un perímetro de 64 m y el largo del terreno es el triple que su ancho. ¿Cuáles son las dimensiones del terreno?

3. Se desea rodear con malla ciclónica el perímetro de un terreno cuadrado que tiene una superficie de 144 m^2. ¿Cuántos metros de malla se necesitan?

4. Un parque se construirá en un terreno con forma de hexágono regular con lado de 14 m y apotema de 15.7 m. Una doceava parte del terreno se destina a superficie con pasillos y bancas, en $\frac{1}{24}$ parte se construirá un quiosco, y la octava parte de todo el terreno se destinará a áreas verdes. ¿Cuántos metros cuadrados corresponden a cada parte?

5. Un automóvil sale de una ciudad a una rapidez de 60 km/h y la mantiene. Tres horas después, del mismo lugar sale una motocicleta en persecución del automóvil. La moto mantiene una rapidez constante de 180 km/h. ¿A qué distancia del lugar de salida la motocicleta alcanzará al automóvil? ¿Cuánto tiempo habrá transcurrido a partir de que sale la motocicleta?

6. Viajando a la rapidez de la luz en el vacío, se pueden dar aproximadamente 7.48 vueltas a la tierra en un segundo, rodeándola a la altura del ecuador, donde el perímetro de la circunferencia que se forma es de 40 075 030 metros. ¿Aproximadamente cuántos metros recorre la luz por segundo? Escribe el resultado final en notación científica.

7. Traza una gráfica de línea con los datos de la tabla. Incluye el valor correspondiente a cada año, el nombre de los ejes y el título. Después responde.

Millones de hogares con internet (2004-2015)

2004	2005	2006	2007	2008	2009
2.3	2.3	2.7	3.3	3.8	5.1

2010	2011	2012	2013	2014	2015
6.3	7.0	7.9	9.6	10.8	12.8

Fuente: [illegible] (consulta: 5 de abril de 2018). Elaboración propia con datos del Inegi, "Encuesta Nacional sobre disponibilidad y uso de tecnologías de la información en los hogares", 2015. Boletín de prensa núm. 131/16, 14 de marzo de 2016.

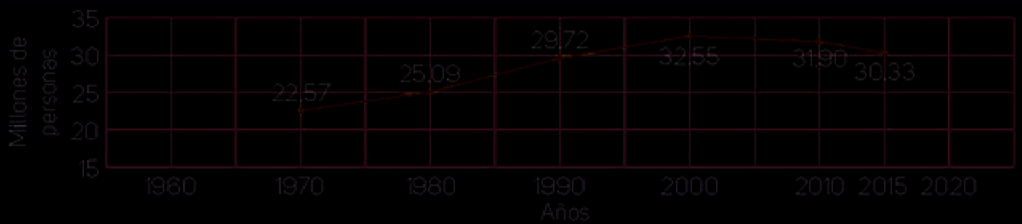
a) ¿En qué periodo creció más el número de hogares con internet: de 2004 a 2006 o de 2014 a 2015? ______

b) ¿Qué tendencia observas en el número de hogares con internet?

______

8. Se considera en rezago educativo a las personas que no han terminado la educación básica (hasta secundaria). Analiza la gráfica y responde.

Rezago educativo en México (1970-2015)



Fuente: Elaboración propia, datos truncados a dos cifras decimales, con base en datos de Adrián Frausto Martín del Campo (2017), "El rezago educativo total y su atención en México". *Revista Latinoamericana de Estudios Educativos* (México), 2017, XLVII (2), (41-58).

¿A partir de qué año disminuye el número de personas en rezago educativo?

______

Trimestre 3

La Torre de Pisa es la torre campanario de la catedral de Pisa, Italia; tiene forma de un cilindro hueco de casi 15 000 toneladas, una altura de más de 58 m y un diámetro exterior de casi 13 m.

¡Estás a punto de terminar este ciclo escolar!
En este trimestre resolverás problemas utilizando múltiplos y submúltiplos de las unidades de medida, de longitud, masa y capacidad que ya conoces. Además conocerás las unidades de medida del Sistema Inglés de estas magnitudes.

También analizarás, interpretarás y compararás situaciones de variación lineal y proporcionalidad inversa a partir de su representación tabular, gráfica y algebraica. Usarás estos nuevos conocimientos para modelar y resolver problemas en diversos contextos, en particular en problemas de la física.

Aprenderás a calcular el volumen de prismas rectos y del cilindro recto. Asimismo, determinarás la probabilidad de un evento en un experimento aleatorio usando la definición teórica de la probabilidad.

Por último, utilizarás e interpretarás las llamadas *medidas de tendencia central*, así como el rango y la desviación media de un conjunto de datos para poder decidir cuál de ellas es más conveniente para el análisis de dicho conjunto.

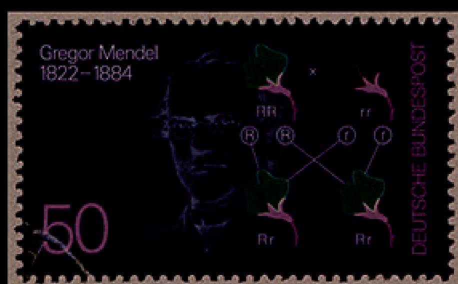
Recuerda revisar de nuevo esta sección al final del trimestre para que compruebes que hayas alcanzado los conocimientos que aquí se describen.

La probabilidad, los juegos de azar y los chícharos

La historia de la probabilidad está llena de situaciones desafiantes en las que participaron grandes científicos. En 1654, el Caballero de Méré, un hombre culto e influyente en la corte de Luis XIV, planteó al matemático Pierre de Fermat una serie de problemas relacionados con juegos de azar.

Entre 1654 y 1657, los científicos Blaise Pascal, Pierre de Fermat y Christiaan Huygens encontraron soluciones a estos problemas, las cuales se comunicaron por carta. Los métodos utilizados por Fermat y Pascal sirvieron de base para que más tarde se construyeran los métodos generales de la probabilidad. Uno de los problemas resueltos por Fermat y Pascal es el famoso problema de la repartición de la apuesta, que es del siguiente tipo: "A y B lanzan 'volados' sucesivos. Cada uno de ellos pone $18 y acuerdan que el primero que gane tres volados se lleva los $36. Cuando A lleva dos volados ganados y B solamente uno, tienen que suspender el juego. ¿Cómo deben repartirse la apuesta?".

Pero la probabilidad no solo se aplica a los juegos de azar. En el siglo XIX, Gregor Mendel, un fraile austriaco, comenzó a estudiar problemas relacionados con la genética, en particular la herencia. Mendel experimentó haciendo cruces entre plantas con diferentes características, entre otras con chícharos, logrando predecir cuáles serían los caracteres físicos (fenotipo) de los descendientes, si se conocen los caracteres de los progenitores. Las reglas que predicen este comportamiento son conocidas como leyes de Mendel. Su obra *La matemática de la herencia* fue una de las primeras aplicaciones de la teoría de la probabilidad en las ciencias naturales. Fue hasta principios del siglo XX que el matemático soviético Andréi Kolmogórov definió la teoría de la probabilidad de forma rigurosa.



Timbre conmemorativo en honor de Gregor Mendel de los servicios postales alemanes.

Secuencia didáctica

23

Aprendizaje esperado: Resolverás problemas que implican conversiones en múltiplos y submúltiplos del metro, litro, kilogramo y de unidades del sistema inglés (yarda, pulgada, galón, onza y libra).

Contenido: Resolverás problemas que implican conversiones en múltiplos y submúltiplos del metro, litro, kilogramo y de unidades del sistema inglés (yarda, pulgada, galón, onza y libra).

Las inglesas y las internacionales

1. Reúnete con un compañero y, después de leer la información, respondan.

De acuerdo con el reglamento de la FIFA, para partidos internacionales, las dimensiones de una cancha de futbol son 100 m de largo por 64 m de ancho, como mínimo, y 110 m de largo por 75 m de ancho, como máximo. Por otro lado, una cancha de futbol americano mide 120 yardas de largo por 160 pies de ancho.

a) ¿Cuál de las dos canchas consideran que es más grande? ____________

b) ¿Qué datos necesitarían para comprobar su respuesta? ____________

____

- Discutan sus propuestas con el resto del grupo.

Construyo

2. Reúnete con un compañero y respondan.

a) ¿Qué unidad elegirían para medir las siguientes magnitudes?

Las dimensiones del pizarrón de su salón: ____________

La cantidad de líquido que hay en un vaso: ____________

La masa de su mochila: ____________

b) ¿Con qué unidad se acostumbra medir longitudes en nuestro país? ____________

Escriban el nombre de algunos múltiplos de esa unidad. ____________

____

Ahora escriban los nombres de algunos de sus submúltiplos. ____________

____

c) ¿Con qué unidad se acostumbra medir la capacidad de los recipientes? ____________

Escriban los nombres de algunos múltiplos y submúltiplos de esa unidad. ____________

____

d) ¿Con qué unidad se acostumbra medir la masa de los objetos? ____________

Escriban los nombres de algunos submúltiplos de esa unidad. ____________

____

e) ¿Conocen otras unidades que sirvan para medir longitudes, capacidades o masas? ____________

f) Si es así, escriban sus nombres y dónde las han escuchado o las han visto.

____

____

- Comparen sus respuestas con las del resto del grupo, y si se mencionan unidades distintas a las que escribieron, anótenlas en sus cuadernos.

Glosario

masa.

Los múltiplos y submúltiplos del metro (m) que se usan más frecuentemente son:

Múltiplos	Submúltiplos
decámetro (dam) = 10 m	decímetro (dm) = 0.1 m
hectómetro (hm) = 100 m	centímetro (cm) = 0.01 m
kilómetro (km) = 1000 m	milímetro (mm) = 0.001 m

Los múltiplos y submúltiplos del kilogramo (kg) que se usan más frecuentemente son:

Múltiplos	Submúltiplos
tonelada (ton) = 1000 kg	gramo (g) = 0.001 kg
	centigramo (cg) = 0.00001 kg
	miligramo (mg) = 0.000001 kg

Los múltiplos y submúltiplos del segundo (s) que se usan más frecuentemente son:

Múltiplos	Submúltiplos
minuto (min) = 60 s	milisegundo (ms) = 0.001 s
hora (h) = 60 min = 3600 s	

3. Lee la información y responde.

El papá de Jimena compró el martes una cubeta de 19 L de pintura que le costó $893.00. Al día siguiente, un galón de la misma pintura le costó $178.60.

a) ¿Cuál es el precio del litro de pintura? ____________

b) ¿Cuántos litros de pintura hay en el galón? ____________ ¿Qué operación hiciste para obtener la respuesta? ____________

____

Compara tus respuestas con el resto del grupo, y si detectas errores, corrígelos.

4. Responde con un compañero después de leer la información.

En una receta, Julieta leyó que para hacer galletas se necesita media libra de harina, pero no sabía cómo calcular esa cantidad y decidió no prepararlas.

Unos días después encontró una báscula que le daba su masa en kilogramos y en libras. La báscula marcó que su masa era 58 kg o 127.865 libras. Ese mismo día Julieta decidió hornear las galletas.

Glosario

litro.

a) ¿A cuántos gramos equivale una libra? ____________________

¿Qué operaciones hicieron para responder? ____________________

____

____

b) ¿Cuántos gramos de harina necesita Julieta para hacer las galletas? __________

Comparen sus respuestas con el resto del grupo, y si detectan errores, corríjanlos. Después analicen la siguiente información.

En casi todo el mundo utilizamos, como unidades fundamentales, el metro (m) para medir longitudes, el kilogramo (kg) para medir la masa de los cuerpos y el segundo (s) para medir el tiempo.

El sistema que usa estas unidades es conocido como **Sistema Internacional de Unidades**, abreviado SI.

La unidad con la que medimos la capacidad de los recipientes, el litro (L), no es una de las unidades internacionales de medida, pero se le acepta como unidad derivada.

Los múltiplos y submúltiplos más usados del litro son: el centilitro (cL), equivalente a 0.01 L, y el mililitro (mL), equivalente a 0.001 L.

En varios países de habla inglesa se usa el **Sistema Inglés de Medidas**.

En ese sistema la unidad de medida de longitud es el pie (pie o ft), la unidad de medida de masa es la libra (lb) y la unidad de medida de la capacidad es el galón (gal).

En la tabla se muestran algunos de sus múltiplos y submúltiplos, así como sus equivalencias con el SI y unidades derivadas:

Magnitud	Sistema Inglés	Equivalencia con el SI y unidades derivadas
	pulgada (in)	1 in = 2.54 cm
	pie (ft)	1 pie = 30.48 cm
	yarda (yd)	1 yd = 0.914 m
	milla (mi)	1 mi = 1609 m
	libra (lb)	1 lb = 453.6 g
	onza (oz)	1 oz = 28.35 g
	galón (gal)	1 gal = 3.785 L

¿Vamos bien?

Resuelve lo siguiente con base en lo que has aprendido. Al terminar, compara tus procedimientos y tus resultados con los de tus compañeros.

I. Realiza las conversiones.

a) 17.2 m = ____________ cm
b) 6 kg = ____________ g
c) 4.5 km = ____________ dm
d) 17 mL = ____________ cL
e) 18 L = ____________ dm^3

II. Haz las operaciones necesarias y escribe los datos faltantes.

a) 1 yarda = ____________ pies
b) 1 pie = ____________ pulgadas
c) 1 libra = ____________ onzas

5. Vuelve a leer el texto de la actividad 1 y responde.

a) ¿Cuál de las dos canchas es más grande? ____________
¿Por qué? ____________

b) ¿Cuál es el área en m^2 del campo de futbol americano? ____________
c) ¿Cuál es el área en pies cuadrados de la cancha de futbol? ____________

Convivo en armonía

Compara tus respuestas con el resto del grupo, y si detectas errores, corrígelos.

6. Reúnete con un compañero y, después de leer el texto, hagan lo que se pide.

En las décadas recientes ha sido evidente un aumento en la temperatura de nuestro planeta; a esto se le conoce como calentamiento global.

Algunos científicos especializados en el tema han concluido que este incremento se debe esencialmente al proceso industrial de producción, en el que se utilizan grandes cantidades de combustibles como el petróleo, la gasolina y el carbón, que al quemarse producen gases como el dióxido de carbono y el metano (gases de efecto invernadero).

Una de las consecuencias del aumento en la temperatura es la modificación en los patrones de las precipitaciones pluviales (es decir, la caída de lluvia, de granizo y de nieve).

Para determinar los niveles de precipitación pluvial se mide la altura que alcanza esta en una superficie de 1 m^2 durante una hora; esta altura se mide en milímetros. Si, por ejemplo, durante una hora se alcanza una altura de menos de 2 mm, se considera que la intensidad de la precipitación es débil, pero si la altura que se alcanza durante una hora es mayor de 30 mm, la intensidad de la precipitación se considera muy fuerte.

a) ¿Cuántos litros de agua se acumularon en un cubo de 1 m de arista si durante una hora de lluvia la altura del agua alcanzó un nivel de 40 mm? ______

b) ¿Cuánta agua cayó en 20 minutos? Expresa esa cantidad en litros y en galones.

______

c) ¿Cuántos galones de agua se acumularon en un cubo de 1 m de arista si el nivel del agua alcanzó una altura de 36 mm? ______

- Discutan sus respuestas y procedimientos con el resto del grupo, y si detectan errores, corríjanlos.

7. Resuelve los problemas.

a) A un paciente se le suministrará un litro de suero intravenoso. Se le aplicarán 5 cm^3 cada dos minutos. ¿En cuánto tiempo se le suministrará todo el suero? ______

______

b) Un tinaco contiene 30 m^3 de agua. ¿Para cuántos días alcanza el agua si diariamente se consumen 420 litros? ______

c) En una tienda de pinturas, Pablo encontró la siguiente oferta: una cubeta (19 L) por $874.00 o cinco galones por $873.00. ¿Qué opción le conviene comprar?

______

______

- Compara tus respuestas con las de un compañero, y si detectas algún error, corrígelo.

Aplico

¿Qué aprendí?

Trabaja los siguientes ejercicios y problemas. Al terminar, revisa tus procedimientos y tus resultados, primero con tus compañeros y luego con tu profesor.

1. ¿Qué múltiplo o submúltiplo del metro elegirías para medir las siguientes longitudes?

a) La distancia entre tu salón y la entrada de la escuela: ______

b) La distancia entre la Tierra y la Luna: ______

c) El espesor de un paquete de 20 hojas de papel: ______

2. Escribe los datos faltantes en la tabla. Haz las conversiones necesarias.

Longitud en...	km	hm	dam	m	dm	cm	mm
Estatura de Jessica						161	
Distancia entre Monterrey y Durango	591.3						
Longitud de una barda				18			
Precipitación pluvial en una ciudad							35

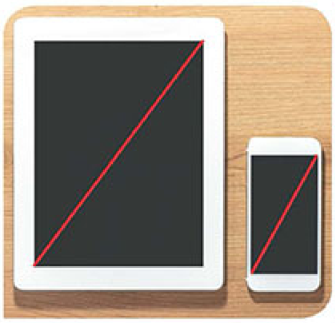
3. Si la masa de un litro de agua es de 1 kg:

a) ¿Cuál es la masa (en kilogramos) de un metro cúbico de agua? ______

b) ¿Cuánto es esa masa en libras? ______

4. En un costal hay siete libras y cuatro onzas de harina. ¿Cuántos kilogramos de harina hay en el costal? ______

5. Las pantallas de las computadoras, tabletas, televisores, teléfonos celulares, etcétera, se miden por la longitud de su diagonal.



a) ¿Cuántos cm mide la pantalla de un televisor de 32 pulgadas? ______

b) ¿Cuántos cm mide la diagonal de un celular de 4.7 pulgadas? ______

c) ¿Cuántos cm mide la pantalla de una computadora de 16 pulgadas? ______

6. Las medidas de las llaves mixtas están dadas en fracciones de pulgada.

a) ¿Cuál es la medida en mm de una llave de $\frac{5}{16}$? ______

b) ¿Y la de una llave de $\frac{7}{8}$? ______

c) ¿Cuál es la medida en mm de una llave de $\frac{11}{32}$? ______

d) ¿Cuántas pulgadas mide una llave de 12.7 mm? ______

e) ¿Y una de 9.525 mm? ______

Glosario

hectómetro. Unidad de longitud que equivale a 100 metros. Su símbolo es hm.

decámetro. Unidad de longitud que equivale a 10 metros. Su símbolo es dam.

Marca con una ✔ la casilla que describe tu desempeño.

Contenido		
Resuelvo problemas que implican conversiones en múltiplos y submúltiplos del metro, litro, kilogramo y de unidades del sistema inglés (yarda, pulgada, galón, onza y libra).		
Nivel de logro	A	Requiero ayuda para realizarlo.
	B	Lo hago, pero en ocasiones necesito ayuda.
	C	Lo hago de manera autónoma.

Secuencia didáctica

24

Aprendizaje esperado: Analizarás y compararás situaciones de variación lineal y proporcionalidad inversa, a partir de sus representaciones tabular, gráfica y algebraica. Interpretarás y resolverás problemas que se modelan con este tipo de variación, incluyendo fenómenos de la física y otros contextos.

Contenido: Analizarás y compararás situaciones de variación lineal y proporcionalidad inversa a partir de sus representaciones tabular, gráfica y algebraica.

Entre líneas y curvas

1. Analiza el texto y haz lo que se indica.

   Diego va de viaje a visitar a sus tíos. Sabe que 15 L de combustible le alcanzan para recorrer 180 km, con 30 L recorre 360 km y con 50 L puede recorrer 600 km. También sabe que a una rapidez constante de 80 km/h hace el recorrido de su casa a la casa de sus tíos en seis horas; manteniendo la rapidez en 120 km/h, lo hace en cuatro horas; y con rapidez constante de 160 km/h, llega en tres horas.

Glosario

coordenadas de un punto en el plano.

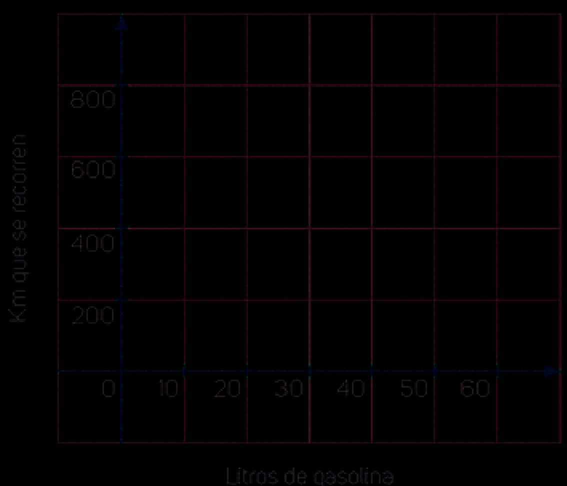
a) Denota con L la cantidad de litros y con r el número de kilómetros que se pueden recorrer. ¿Qué tipo de relación proporcional hay entre estas dos magnitudes? ______________________ ¿Cuál es la constante de proporcionalidad? ______________ Escribe la expresión algebraica que representa la relación entre estas dos magnitudes. ______________________

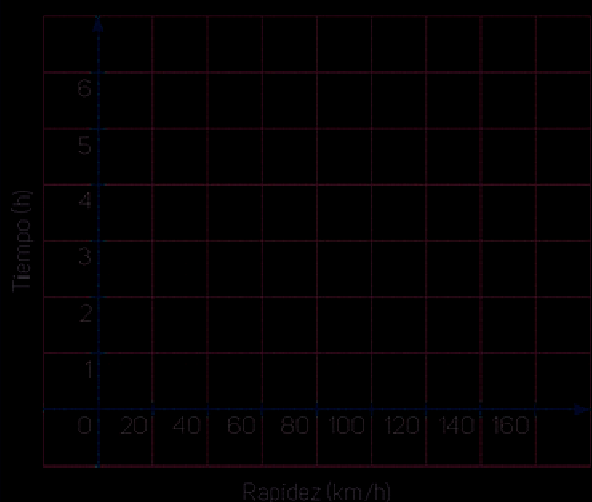
b) Ahora, denota con x la velocidad con que viaja Diego de su casa a la casa de sus tíos y con y el número de horas en que realiza el recorrido.

   ¿Qué tipo de relación proporcional hay entre estas dos magnitudes? ______________________ ¿Cuál es la constante de proporcionalidad? ______________

   Escribe la expresión algebraica que representa la relación entre estas dos magnitudes. ______________________

c) Escribe sobre cada plano la expresión algebraica de la relación que representa. Ubica los respectivos puntos en cada plano y anota sus coordenadas (L, r) o (x, y). También agrega un título a las gráficas.





d) Si Diego viajara a 100 km/h, ¿cuántas horas tardaría en hacer el recorrido?

____

e) En la gráfica que corresponda, traza el punto con abscisa y ordenada iguales a los valores del inciso anterior.

f) ¿Qué distancia hay de la casa de Diego a la de sus tíos? _______________

¿Cuántos litros de gasolina necesita para recorrer esa distancia? _______________

g) Traza el punto con abscisa y ordenada iguales a los valores del inciso anterior.

h) Si Diego quiere hacer el recorrido de su casa a la de sus tíos en cinco horas, ¿con qué rapidez debe viajar? _______________

Traza el punto correspondiente en el plano adecuado.

i) Traza la gráfica que corresponde a la relación directamente proporcional.

j) ¿Puedes unir con una sola recta los puntos del plano para obtener la gráfica de la relación de proporcionalidad inversa? __________ ¿Por qué? _______________

____

____

____

Glosario

abscisa.

ordenada.

relación de proporcionalidad inversa.

- Compara tus respuestas y tus procedimientos con los de tus compañeros y lleguen a acuerdos.

2. En equipo, lean el texto y realicen lo que se pide.

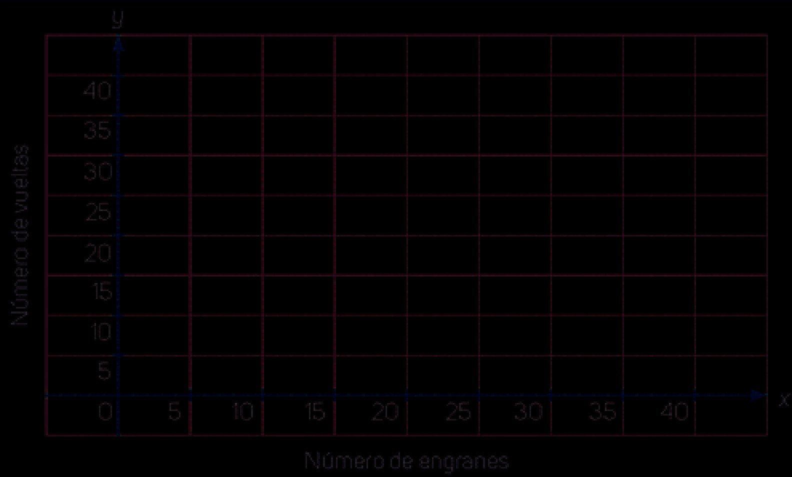
En el sistema de engranes de una máquina, el movimiento de una rueda provoca el movimiento de las demás. La expresión que representa la relación del número y de vueltas que da una rueda con el número x de engranes que tiene la rueda es:

$$y = \frac{108}{x}$$

a) Completen la tabla.

Número de engranes (x)	4	8	10		20	30
Número de vueltas (y)				6		
(x, y)	$A = (4, \_\_\_)$	$B = (8, \_\_\_)$	$C = (10, \_\_\_)$	$D = (\_\_\_, 6)$	$E = (20, \_\_\_)$	$F = (30, \_\_\_)$

b) En el siguiente plano, ubiquen los puntos (x, y) de la tabla anterior.



c) Calculen la pendiente de las rectas que pasan por los puntos indicados.

A y *B*: __________

A y *C*: __________

A y *D*: __________

A y *E*: __________

d) ¿Hay pendientes iguales? ______ ¿Cómo son las pendientes? ______

e) Reflexionen y discutan si puede haber tres puntos *G*, *H* y *J* en la gráfica donde la pendiente del segmento de recta que une *G* con *H* sea igual a la pendiente del segmento que une *G* con *J*. Prueben calculando la pendiente para segmentos que unan distintos puntos sobre la gráfica.

f) Si calculan la pendiente de una recta con dos de sus puntos y después la calculan con otros dos puntos de esta, ¿pueden obtener valores distintos? ______

g) ¿La gráfica de la relación entre x y y puede ser una recta? ______

¿Por qué? ______

______ ¿La gráfica puede contener algún segmento de recta?

______ ¿Por qué? ______

h) En el plano anterior, tracen la gráfica que corresponde a la relación entre el número x de engranes que tiene una rueda y el número y de vueltas que da.

i) ¿La relación entre las magnitudes x y y es de proporcionalidad inversa? ______

¿Por qué? ______

Expongan su trabajo ante sus demás compañeros. Discutan cómo es la gráfica de una relación inversamente proporcional.

Una **relación de proporcionalidad inversa** se representa gráficamente en un plano cartesiano mediante **una curva**. Los puntos (x, y) de la gráfica satisfacen la relación $y = \frac{k}{x}$, donde k es la constante de proporcionalidad.
La relación representada por esa gráfica se llama **función de proporcionalidad inversa** y se denota $f(x) = \frac{k}{x}$. Significa que el valor de $y = f(x)$ está en función o depende del valor de x, la expresión "$f(x)$" significa "función de x". A x se le llama **variable independiente** y a y **variable dependiente**.

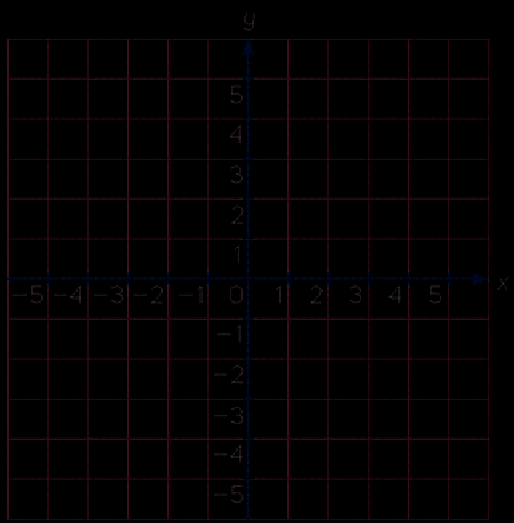
3. Realiza con un compañero lo que se indica considerando la relación cuya expresión es $y = \frac{2}{x}$.

a) Escriban los valores que corresponden a y para cada valor de x que se da en las tablas.

x	0.4	0.5	0.65	1	2	3	4	5
y								

x	−0.4	−0.5	−0.65	−1	−2	−3	−4	−5
y								

b) Tracen la gráfica correspondiente.



c) Escriban el producto xy de las coordenadas de cuatro puntos de la gráfica.

_____ _____ _____ _____

¿Qué observan en los productos anteriores? ______

¿Por qué ocurre eso? ______

______

d) Conforme x va tomando valores cada vez más grandes, ¿los valores correspondientes de y crecen o decrecen? ______

Glosario

intervalos de números

e) Analicen cómo cambia la pendiente entre parejas de puntos en distintos intervalos. ¿En qué intervalos del eje x crece o decrece más rápidamente la gráfica?

______

¿Por qué? ______

______

f) ¿En cuáles intervalos crece o decrece más lentamente la gráfica? ______

______

¿Por qué? ______

______

g) Calculen el valor de y para cada x y completen la tabla.

x	10	100	10^3	10^4
y				

h) ¿Qué pasa con los valores de y si continuamos dando valores positivos cada vez mayores a x? ______

i) Calculen el valor de y para cada x y completen la tabla.

x	0.1	0.01	10^{-3}	10^{-4}
y				

j) ¿Qué pasa con los valores de y si continuamos dando valores a x cada vez más cercanos a cero? ______

k) Ahora asignen valores negativos a x y analicen qué pasa con los valores de y cuando x se aleja de cero tomando valores cada vez más y más negativos (como -10^2, -10^3, -10^4), y qué pasa con los valores de y cuando x va tomando valores negativos que se acercan a cero (como -0.01, -0.001, -0.0001). Escriban sus conclusiones en su cuaderno.

l) En el contexto de la actividad 1, donde y representa el número de horas que tardará Diego en llegar a la casa de sus tíos, si viaja a una rapidez constante x, ¿qué significa que x sea igual a cero? ______

______

m) En el contexto de la actividad 2, donde y representa el número de vueltas que da una rueda que tiene un número x de engranes, ¿x puede tomar el valor 0? ______

n) Describan la gráfica que trazaron en el primer cuadrante del plano. En su cuaderno escriban las características de la gráfica en el tercer cuadrante.

- Comparen sus respuestas, su gráfica y su descripción con las de otros estudiantes. Si tienen diferencias, analicen a qué se deben, discútanlas y lleguen a un acuerdo.

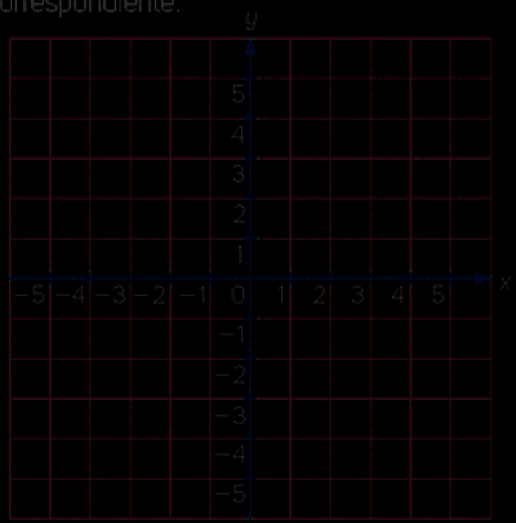
4. Sigan trabajando en pareja, pero ahora consideren la relación $y = \frac{-2}{x}$.

a) Completen la tabla de valores.

x	0.4	0.5	0.65	1	2	3	4	5
y								

x	−0.4	−0.5	−0.65	−1	−2	−3	−4	−5
y								

b) Tracen la gráfica correspondiente.



c) Escriban todas las diferencias y similitudes que encuentren entre esta gráfica y la de la actividad anterior. Consideren sus respuestas a las preguntas de esa actividad.

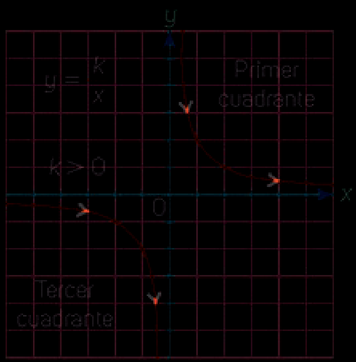
Similitudes:

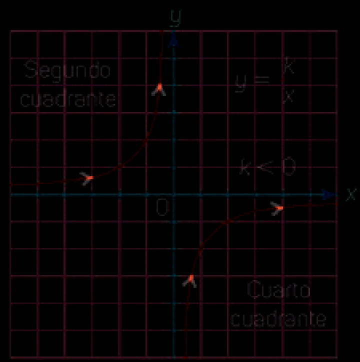
Diferencias:

Expongan ante sus compañeros las gráficas de las dos últimas actividades y mencionen sus diferencias. Discutan en grupo las características de la gráfica de una relación de proporcionalidad inversa cuando la constante de proporcionalidad es positiva y cuando es negativa y lleguen a un acuerdo. Después analicen el texto de la siguiente página.

En una gráfica de proporcionalidad inversa, donde $y = \frac{k}{x}$:

- El producto de las coordenadas de cada punto es la constante de proporcionalidad k.
- La curva tiene dos ramas. Cuando $k > 0$, una rama está en el primer cuadrante y la otra en el tercero; y si $k < 0$, una rama está en el segundo cuadrante y la otra en el cuarto.
- Si $k > 0$, la gráfica es **decreciente**: conforme crecen los valores de x, los de y decrecen. Y para $k < 0$, la gráfica es **creciente**: conforme crecen los valores de x, los de y también crecen.
- La gráfica se acerca a los ejes coordenados, pero no los atraviesa.

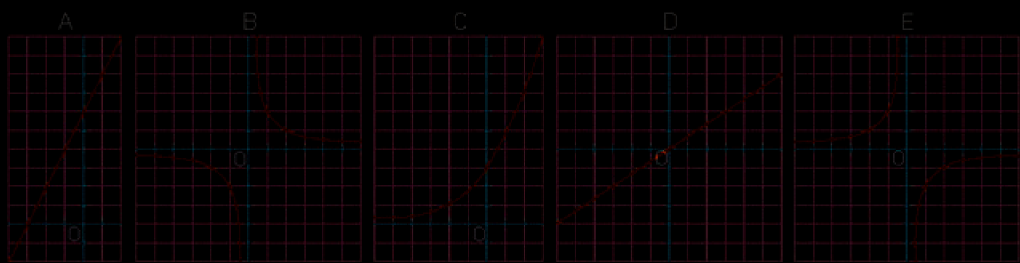




¿Vamos bien?

Haz lo que se indica a partir de lo que has aprendido. Al terminar, compara tus argumentos con los de tus compañeros.

Determina cuáles de las siguientes gráficas corresponden a una relación de proporcionalidad directa, a una de proporcionalidad inversa, a una variación lineal o a ninguno de los tres tipos de relaciones.



5. Analiza la situación y haz lo que se indica.

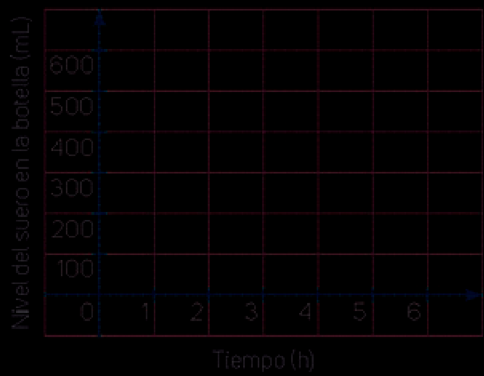
En un hospital se coloca suero por vía intravenosa a un paciente. Al pasar una hora, el nivel del suero en la botella estaba en 600 mL, y cuando habían transcurrido cuatro horas, estaba en 150 mL.

a) ¿La relación entre el número x de horas transcurridas y el nivel y del suero en la botella es inversamente proporcional? __________ ¿Por qué? ______________________

b) Traza la gráfica que representa la relación.

c) Si la botella se retiró del paciente cuando el nivel del suero llegó a 120 mL, ¿durante cuántas horas recibió la sustancia? ______________________

Nivel de suero en la botella en relación con el tiempo transcurrido



- Compara tu gráfica y tus respuestas con las de otros estudiantes.

¿Qué aprendí?

Analiza el problema y haz lo que se indica. Al terminar, revisa tus procedimientos y resultados, primero con ayuda de tus compañeros y luego con tu profesor. Si hay errores, reflexiona a qué se deben, analiza qué hacer para no volver a cometerlos y corrige.

En un deportivo, cuatro llaves tardan 12 horas en llenar una alberca. Si todas las llaves arrojan la misma cantidad de agua, ¿cuánto tiempo tardan en llenar la alberca siete llaves? ______________________

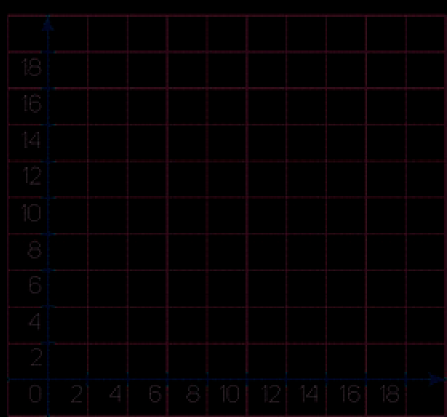
a) ¿Qué tipo de relación hay entre el número de llaves y el tiempo que tardan en llenar el depósito?

____

b) Escribe la expresión que describe esta relación.

____

c) Traza la gráfica que corresponde y ubica en esta el punto cuyas coordenadas solucionan el problema. Agrega un título a la gráfica.



Marca con una ✓ la casilla que describe tu desempeño.

Analizo y comparo situaciones de variación lineal y proporcionalidad inversa a partir de sus representaciones tabular, gráfica y algebraica.

Nivel de logro

- A Requiero ayuda para realizarlo.
- B Lo hago, pero en ocasiones necesito ayuda.
- C Lo hago de manera autónoma.

Secuencia didáctica

25

Aprendizaje esperado: Analizarás y compararás situaciones de variación lineal y proporcionalidad inversa, a partir de sus representaciones tabular, gráfica y algebraica. Interpretarás y resolverás problemas que se modelan con este tipo de variación, incluyendo fenómenos de la física y otros contextos.
Contenido: Interpretarás y resolverás problemas que se modelan con variación inversamente proporcional, incluyendo fenómenos de la física y otros contextos.

Aplica la proporcionalidad inversa

1. Analiza el texto con un compañero y hagan lo que se pide.

Cuando un objeto recorre una distancia a rapidez constante R, la distancia d recorrida es directamente proporcional al tiempo transcurrido t: $d = Rt$.

Cuando la distancia d es la misma (es constante) y se recorre a distinta rapidez, entonces la rapidez es inversamente proporcional al tiempo transcurrido, y podemos calcularla en función del tiempo: $R = \frac{d}{t}$.

Un camión de carga recorrió cierta distancia a una rapidez constante de 75 kilómetros por hora (km/h) en 12 h. Otros vehículos, viajando a rapidez constante, recorren la misma distancia en distintos tiempos, que se registran en la tabla.

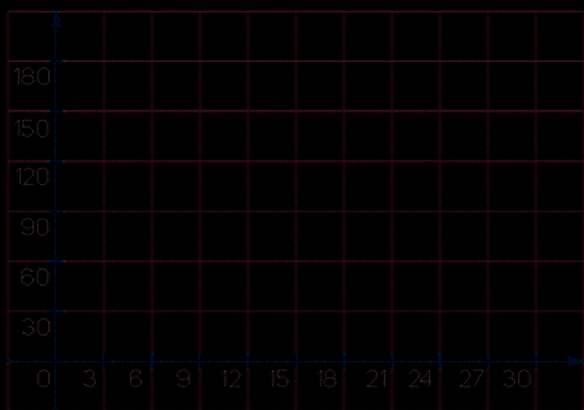
a) Calculen la constante de proporcionalidad $k = d$. ______

b) Escriban a qué es igual la rapidez R. ______

c) En la tabla, escriban la rapidez correspondiente a cada tiempo.

d) En el plano, tracen la gráfica y escriban el nombre de los ejes y un título.

t (h)	R (km/h)
6	
7.5	
9	
12	75
15	
18	
30	



e) ¿La gráfica es creciente o decreciente? ______
¿Es una curva o una recta? ______

f) Conforme aumenta el tiempo en que los vehículos recorren la misma distancia, ¿qué pasa con la rapidez: aumenta o disminuye? ______

g) Y si el tiempo que tardan los vehículos en recorrer la misma distancia va disminuyendo, ¿la rapidez aumenta o disminuye? ______

h) Un cohete recorre la misma distancia con una rapidez mayor a 1 000 km/h. Sin hacer cálculos, estimen si tardará más o menos de una hora en hacerlo.

i) ¿En qué intervalo de tiempo es mayor la variación de la rapidez: de 6 h a 10 h o de 15 h a 30 h? Respondan con apoyo de la gráfica.

Comparen su tabla y su gráfica con las de otros estudiantes. Si hay diferencias, analicen a qué se deben, detecten el error y corríjanlo. Regresen a la actividad 1 de la secuencia anterior, revisen lo que hicieron y, si es necesario, corrijan.

2. Trabaja individualmente esta actividad.

La presión es la fuerza que ejercen un gas, un líquido o un sólido sobre una superficie. En el caso de un gas encerrado en un recipiente, la presión es la fuerza que ejercen las partículas del gas sobre las paredes del recipiente. En ciertas condiciones, manteniendo fija la cantidad de gas (el número de partículas del gas) y a una temperatura constante, la presión del gas depende solo del volumen del recipiente.

Si el volumen aumenta, las partículas se separan más entre sí y la presión que ejerce el gas disminuye. La ley de Boyle establece que, en estas condiciones, la presión que ejerce el gas es inversamente proporcional al volumen del recipiente en que se encuentra. La presión se mide en atmósferas (atm) y el volumen de un recipiente se mide en decímetros cúbicos (dm^3), lo que equivale a medirlo en litros, pues 1 dm^3 es equivalente a 1 L.

P es inversamente proporcional a V; así, $PV = k$.

En la siguiente tabla se dan los datos obtenidos en un experimento donde se midió la presión P que ejerce un gas en recipientes con distinto volumen.

V (L)	6	8	12	16	24
P (atm)	20	15	10	7.5	5

a) ¿Cuál es la presión del gas en un recipiente de 10 L?

¿Y en un recipiente de 20 L?

¿Y en un recipiente de 30 L?

b) ¿Cuál es la constante de proporcionalidad?

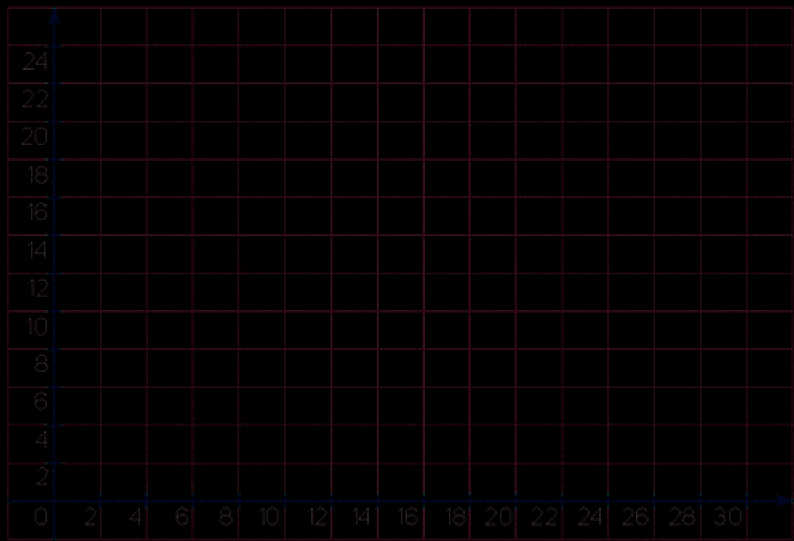
c) Completa la expresión algebraica que permite calcular la presión P conociendo el volumen V: $P =$

d) ¿Cuál debe ser el volumen de un recipiente para que la presión sea de 8 atm?

e) ¿Cómo estimas que es la gráfica de esta relación: creciente o decreciente?

¿Es una curva o es una recta?

f) Traza la gráfica correspondiente, escribe el nombre de los ejes y un título.



g) Para que la presión vaya disminuyendo, ¿el volumen de los recipientes debe ir disminuyendo o aumentando? ______

h) Para que la presión vaya aumentando, ¿el volumen de los recipientes debe ir aumentando o disminuyendo? ______

i) Un laboratorista analizó el comportamiento de la presión en recipientes que van de 6 L a 15 L. Otro laboratorista lo hizo con recipientes que van de 20 L a 30 L. Después, los laboratoristas compararon cómo disminuía la presión del gas.

¿En cuál de los dos casos fue más rápido el decrecimiento: en los recipientes de 6 L a 15 L o en los de 20 L a 30 L? ______

Compara tu trabajo con el de tus compañeros. En caso de encontrar diferencias, analícenlas y lleguen a un consenso. Si hay errores, investiguen por qué se cometieron y busquen la manera de no cometerlos nuevamente. Después corríjanlos.

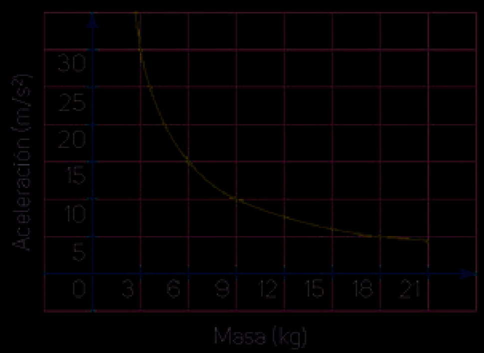
3. Analiza el texto y haz lo que se indica.

Cuando se aplica una fuerza a un objeto con una cierta masa, el objeto se acelera. La segunda ley de Newton establece que $F = ma$, donde F es la fuerza neta que actúa sobre el cuerpo, a es la aceleración y m es la masa.

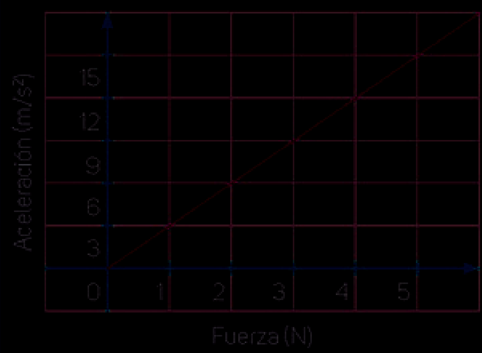
La masa se mide en kg, la aceleración en m/s^2 y la fuerza en newtons. Los newtons se denotan con N, y un newton equivale a la fuerza aplicada a un objeto de 1 kg con una aceleración de 1 m/s^2, es decir, $1\ N = 1\ kg(m/s^2)$. Así, al dividir fuerza entre masa se obtienen las unidades de la aceleración.

En un laboratorio se realizaron dos experimentos, el A y el B, aplicando fuerzas a objetos y midiendo la aceleración resultante. Los datos se registraron y con base en estos se trazaron las siguientes gráficas.

A. Relación aceleración-masa



B. Relación aceleración-fuerza



a) ¿En cuál de los experimentos ocurrió que al aumentar una de las magnitudes, la otra disminuyó: en el A o en el B? ________ ¿En este experimento varió la masa de los objetos? ________ Si tu respuesta es afirmativa, ¿qué pasó con la aceleración conforme aumentó la masa? ________________ ¿Varió la fuerza? ________ Usa los datos de la gráfica para calcular la fuerza que se aplicó a los objetos: ____________________________ Completa la expresión que permite calcular la aceleración conociendo la masa de los objetos: $a =$ ________________

b) ¿En cuál de los experimentos ocurrió que al aumentar una de las magnitudes la otra también aumentó: en el A o en el B? ________ ¿En este experimento varió la fuerza aplicada a los objetos? ________ Si tu respuesta fue afirmativa, ¿qué pasó con la aceleración al aumentar la fuerza? ____________________________
¿Varió la masa? ________ Calcula la masa: ____________________________
Completa la expresión para calcular la aceleración conociendo la fuerza: $a =$ ____

c) ¿En cuál de los dos experimentos la relación entre las magnitudes es inversamente proporcional? ____________ ¿En cuál la relación es directamente proporcional? ____________________________

d) Completa la siguiente formulación de la segunda ley de Newton:
Cuando se aplica una fuerza constante a distintos cuerpos, la aceleración es ________________ proporcional a la masa de los cuerpos; y cuando varía la fuerza que se aplica a un mismo cuerpo, la aceleración es ________________ proporcional a la fuerza que actúa sobre él.

Revisa tu trabajo con un compañero. Comprueben todas sus operaciones. Comparen sus procedimientos y discutan si son equivalentes.

La relación entre magnitudes inversamente proporcionales se utiliza para modelar fenómenos de la física y otras ciencias, así como en distintos contextos sociales, económicos y empresariales.

Para identificar si un problema planteado en cualquier contexto corresponde o no a una relación de proporcionalidad inversa, puedes hacer lo siguiente:

1. Analiza el enunciado hasta que lo tengas totalmente claro.
2. Identifica las magnitudes involucradas.
3. Registra los datos proporcionados.
4. Verifica si se cumple que el producto de las magnitudes es constante (o si lo que te dan es una gráfica, verifica si el producto de los valores de las coordenadas de los puntos es constante).

www.esant.mx/essema2-012

¿Vamos bien?

Lee el texto y resuelve lo siguiente con base en lo que has aprendido. Al terminar, compara tus argumentos con los de tus compañeros.

La máquina de un tren con 12 vagones alcanza, en promedio, una rapidez de 87.5 km/h, pero cuando a la misma máquina le colocan 15 vagones alcanza una rapidez promedio de 70 km/h.

a) ¿Cuáles son las magnitudes involucradas en el planteamiento del problema?

____

b) ¿La relación entre las magnitudes es directamente proporcional? ____________
¿Por qué? ____
____________________ ¿Es una relación de proporcionalidad inversa? ________
¿Por qué? ____
____

c) ¿Qué rapidez promedio alcanza la misma máquina con 25 vagones? ____________
____

4. Lee el texto y haz lo que se indica.

El dueño de una fábrica de utensilios de cocina determina, cada trimestre, el gasto de producción de cada uno de sus artículos de la siguiente manera: multiplica el número total de piezas producidas de un mismo artículo por lo que le costó producir cada pieza (lo que llama *costo unitario*).

En la tabla se muestran las variaciones trimestrales del costo unitario de un artículo y el número total de piezas producidas de este.

Trimestre	1	2	3	4
[illegible]	500	160		400
[illegible]	16		25	

a) ¿Cuál fue la cantidad de gastos de producción del artículo durante cada trimestre?

b) Completa la tabla anterior.

c) Si aumenta el número de piezas producidas, ¿qué pasa con el costo unitario?

d) El fabricante planea mantener sus gastos de producción en la misma cantidad, pero quiere que el costo unitario sea mayor a $18.45 y menor que $18.55. Para que esto ocurra, ¿cuántas piezas tendrá que producir el fabricante?

- Compara tus respuestas y tus procedimientos con los de tus compañeros.

¿Qué aprendí?

Analiza el problema y haz lo que se indica. Al terminar, revisa tus procedimientos y tus resultados, primero con ayuda de tus compañeros y luego con tu profesor.

1. Un ciclista recorre cierta cantidad de metros en 30 s viajando a una rapidez constante de 20 m/s, pero si viaja a una rapidez constante de 12 m/s, recorre la misma distancia en 50 s. ¿Con qué rapidez viaja el ciclista si recorre la misma distancia en 7.5 s?

2. En un laboratorio se necesitan envasar 800 L de una sustancia. Se tienen recipientes con distintas capacidades. Para su almacenaje se requiere que los 800 L queden en envases con la misma cantidad de litros.

   a) ¿Cuál expresión relaciona el número n de envases que se necesitan para envasar los 800 L con su capacidad en litros?

   b) ¿Cuántos recipientes de 10 L se necesitan para envasar los 800 L?
   ¿Cuántos de 20 L?

   c) Si queremos usar un menor número de recipientes, ¿el volumen debe ser mayor o menor a 10 L?

Marca con una ✓ la casilla que describe tu desempeño.

Interpreto y resuelvo problemas que se modelan con variación inversamente proporcional, incluyendo fenómenos de la física y otros contextos.

Nivel de logro		
	A	Requiero ayuda para realizarlo.
		Lo hago, pero en ocasiones necesito ayuda.
	C	Lo hago de manera autónoma.

Taller de tecnología

Representación gráfica de relaciones de proporcionalidad inversa

Abre una hoja de GeoGebra y elige una vista con ejes, cuadrícula y "Vista Algebraica". Usa la herramienta "Desplazar Vista Gráfica" del último icono para centrar los ejes.

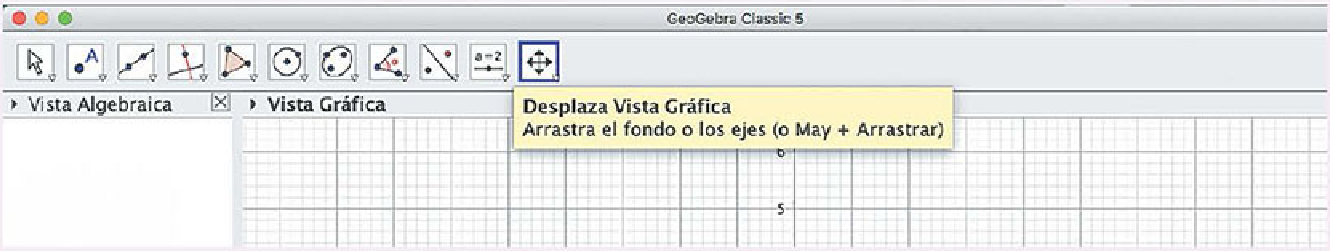


Imagen 1

1. Construye un deslizador para la constante de proporcionalidad $c > 0$.

   a) En la línea superior de comandos, selecciona la herramienta "Deslizador" del penúltimo icono: a=2, y haz clic en cualquier lugar de la vista gráfica. Se abrirá un cuadro de diálogo como el siguiente:

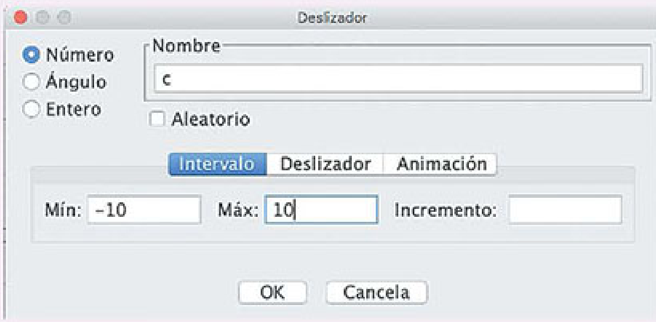


Imagen 2

   b) En la casilla "Nombre", escribe "c"; en la casilla "Intervalo", en "Mín" anota 0 y en "Máx", 10; en "Incremento" escribe el número 0.1. En la pestaña "Deslizador", asegúrate de que no esté señalada la casilla "Fijación" para que puedas mover el deslizador y colocarlo donde más te guste; en la casilla "Posición", elige "Horizontal", y si aparece la opción "Ancho" escribe 200. En la pestaña "Animación", deja la velocidad 1 y asegúrate de que en "Repite" se muestra la palabra "Oscilante". Al presionar "OK" aparecerá el deslizador.

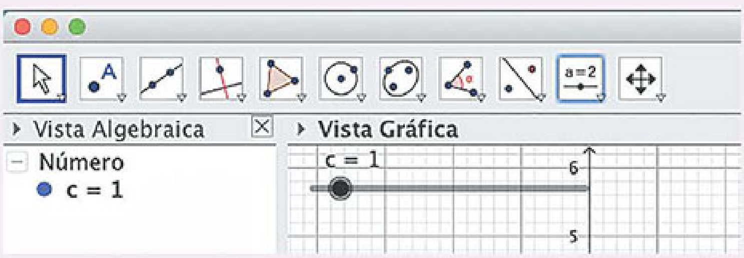


Imagen 3

En la línea superior de comandos, selecciona el primer icono "Elige y mueve" , coloca el cursor sobre cualquier parte del deslizador y mantén presionado el botón izquierdo del ratón para desplazarlo. Colócalo en cualquier parte que no se encime con la gráfica.

c) Coloca nuevamente el cursor sobre el deslizador, presiona el botón derecho del ratón y selecciona "Propiedades" (imagen 4). Elige "Color". Se despliega un cuadro de diálogo como el de la imagen 5. Coloca el cursor sobre el color azul y presiona el botón izquierdo del ratón.

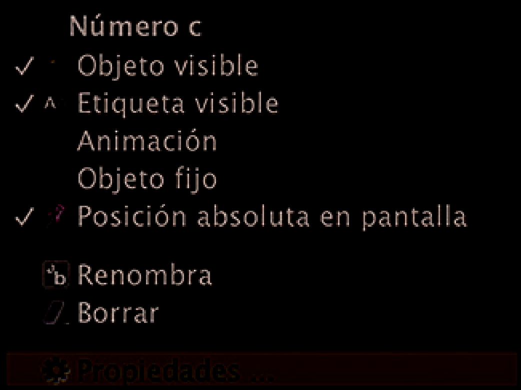


Imagen 4

Imagen 5

Cierra el cuadro de diálogo presionando en la cruz que aparece en la parte superior izquierda o derecha (según la versión). Coloca el cursor sobre el deslizador, mantén presionado el botón izquierdo y desplázalo a alguna esquina.

Imagen 6

2. Construye la gráfica de la relación $y = \frac{c}{x}$, con $c > 0$.

a) En la barra de "Entrada", en la parte inferior de la pantalla, escribe "y = c / x", dejando un espacio entre *c* y la diagonal, y un espacio entre la diagonal y *x*. El espacio indica al programa la operación de división (imagen 7).

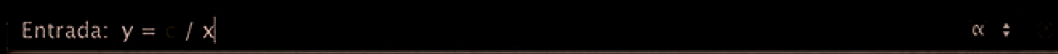


Imagen 7

Al presionar la tecla Enter, aparecerá la gráfica de la relación. Coloca el cursor sobre cualquier parte de la gráfica, selecciona su expresión algebraica (en el panel lateral izquierdo), presiona el botón derecho del ratón y selecciona "Propiedades" (imagen 8, siguiente página); se despliega un cuadro de diálogo como el de la imagen 9; en la pestaña "Color", elige el mismo color del deslizador: azul.

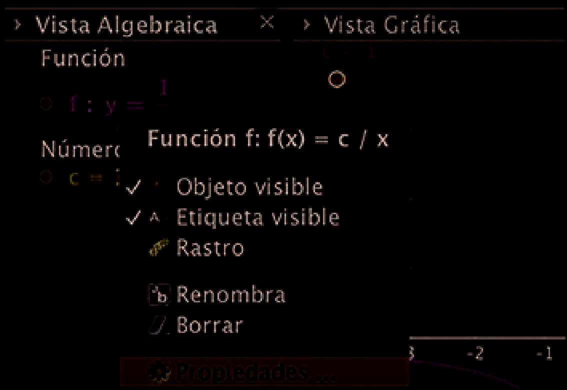


Imagen 8

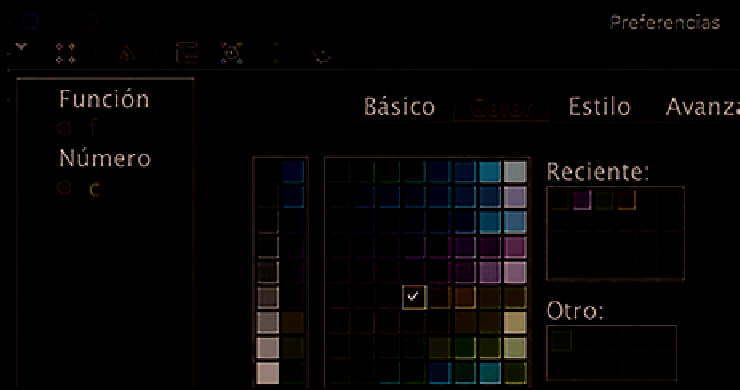


Imagen 9

Cierra el cuadro de diálogo. La gráfica aparece como se muestra a continuación.

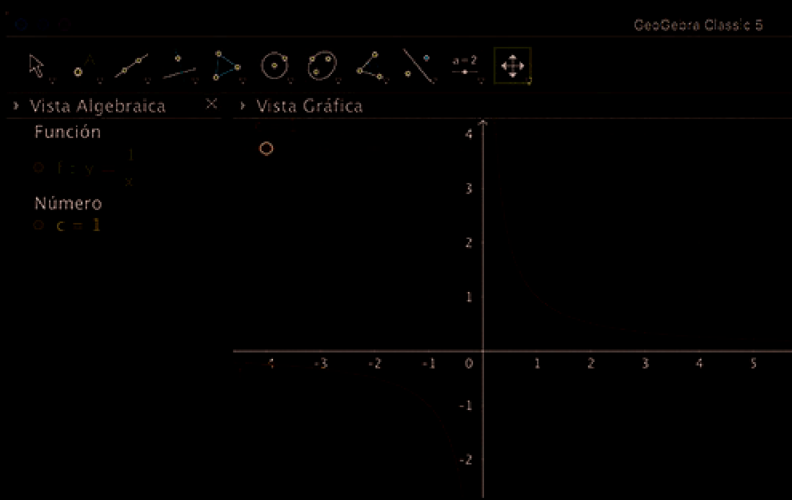


Imagen 10

b) Coloca el cursor sobre el botón del deslizador y desplázalo. Observa cómo varía la gráfica de la relación, y en la "Vista Algebraica" (panel lateral izquierdo) fíjate cómo va variando la expresión algebraica correspondiente.

Imagen 11

3. Construye un deslizador para la constante de proporcionalidad $k < 0$.

   Sigue los mismos pasos que en la actividad 1, pero en el inciso *b* cambia los valores: en "Nombre", escribe "k"; en "Intervalo", el mínimo es -10 y el máximo 0. Al cambiar el color del deslizador, elige rojo o cualquier otro color distinto del azul.

4. Construye la gráfica de la relación $y = \frac{k}{x}$, con $k < 0$.

   a) En la línea de "Entrada" escribe "y = k / x". No olvides dejar espacio a la derecha y a la izquierda de la diagonal. Al presionar la tecla Enter, aparecerá la gráfica. Coloca el cursor sobre el botón del deslizador "k" y desplázalo.

b) Coloca el deslizador “c” en $c = 4$, y el “k” en $k = -4$. Compara las gráficas y sus expresiones algebraicas. Repite la operación para $c = 3$ y $k = -3$, $c = 5$ y $k = -5$.

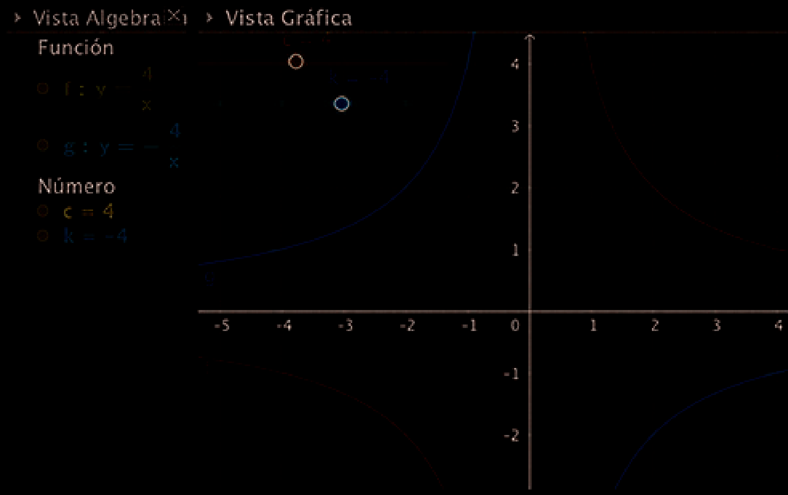


Imagen 12

Escribe las semejanzas y diferencias entre las expresiones algebraicas y las gráficas.

c) ¿Qué pasa cuando c y k son iguales a cero? ¿Es la gráfica de una relación inversamente proporcional?

Quita de la vista gráfica la representación de $y = \frac{k}{x}$. Para eso coloca el cursor sobre el círculo que aparece en el lado izquierdo de la expresión algebraica y presiona el botón izquierdo del ratón. Si vuelves a dar clic, se mostrará la gráfica. Déjala sin vista.

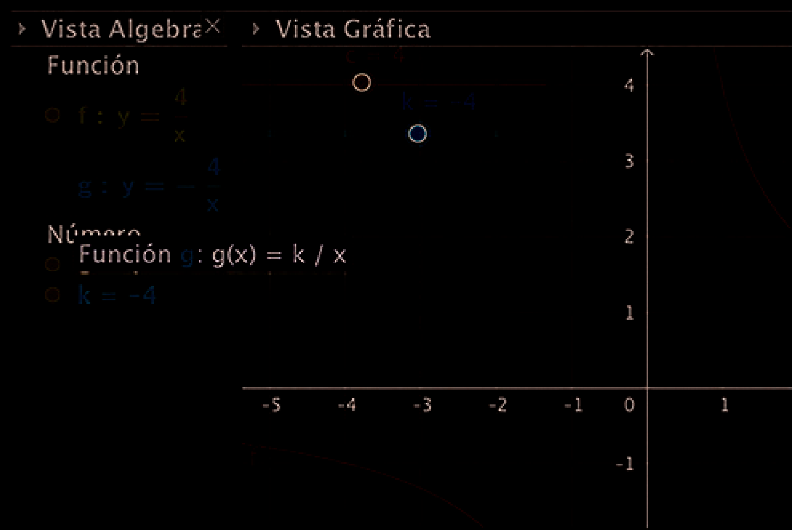


Imagen 13

5. Traza la gráfica de $y = \frac{1}{x}$; en “Entrada” escribe “y = 1 / x”.

Mueve el deslizador c y compara la gráfica de $y = \frac{1}{x}$ con la de $y = \frac{c}{x}$ para distintos valores de c; distingue lo que pasa cuando $0 < c < 1$ y cuando $c > 1$. Describe lo que observas.

Un alto en la espiral

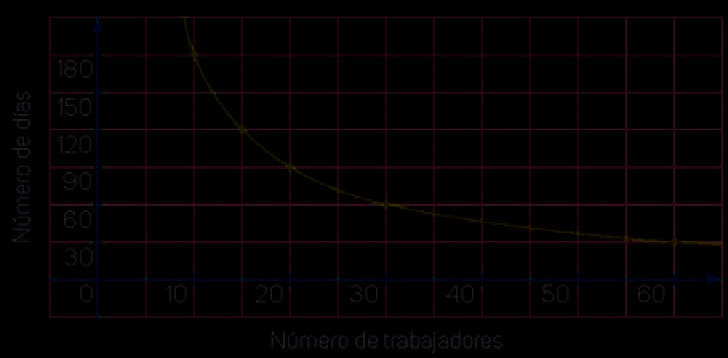
Realiza lo que se indica. Con base en tus resultados y con ayuda de tu profesor, identifica las secuencias correspondientes a los contenidos que debes repasar.

1. De una botella que contiene 1 L de jugo se sirven cuatro vasos con 20 cL de jugo. ¿Qué cantidad de jugo queda en la botella? ____________________
   Escribe tu procedimiento.

2. Una caja contiene 500 hojas, todas iguales, tamaño carta, y pesa 0.6 kg. La caja vacía pesa 200 g. ¿Cuántos miligramos pesa cada hoja? ____________________
   Escribe tu procedimiento.

3. Una constructora diseñó una vivienda prototipo y evalúa el tiempo que tomará construirla. En la gráfica se muestra la relación entre el número de trabajadores y el número de días en que terminarán la construcción, suponiendo que todos laboran con la misma eficiencia.

Relación del número de días y el número de trabajadores que tardan en construir una vivienda



Analiza la gráfica y responde con base en tu análisis.

a) ¿En cuánto tiempo construirán la vivienda 20 trabajadores? ____________
b) ¿Cuántos trabajadores pueden hacer la construcción en 120 días? ____________
c) ¿La relación entre el número de trabajadores y el de días es de proporcionalidad inversa? ________ ¿Por qué? ____________________
d) Determina la expresión algebraica que permite calcular el número de días conociendo el número de trabajadores. ____________________
e) ¿En cuánto tiempo realizan la construcción 25 trabajadores? ____________

4. En la tabla está registrado el tiempo que tarda en llenarse una cisterna de agua, de acuerdo con el número de llaves que se abren (todas las llaves arrojan la misma cantidad de agua).

Número de llaves	2	3	4	5	8	10	15
Número de horas			7.5		3.75		

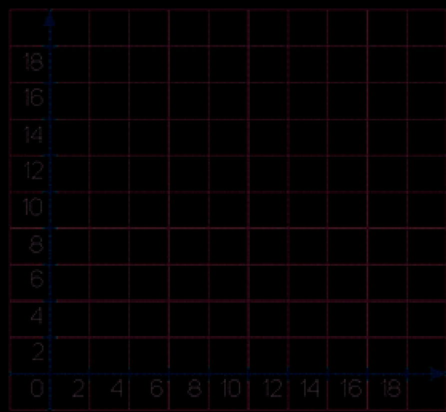
a) Completa la tabla anterior y traza la gráfica correspondiente. Agrega el nombre de los ejes y un título.

b) ¿Cómo es la gráfica: creciente o decreciente? ______

¿Qué significa eso en el contexto del problema? ______

______

______



c) Completa la expresión para encontrar el número h de horas que tarda en llenarse la cisterna, conociendo el número n de llaves que se abren: $h =$ ______

d) Usa la relación anterior para encontrar el número de horas que tarda en llenarse la cisterna cuando se abren seis llaves. ______

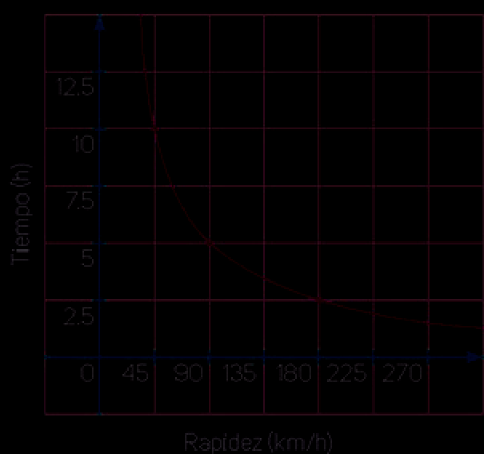
5. La gráfica describe cómo varía el tiempo que tarda un automóvil en recorrer cierta distancia en función de la rapidez con que realiza el recorrido.

a) ¿La relación entre la rapidez y el número de horas es de proporcionalidad inversa? ______ Si tu respuesta es afirmativa, calcula la constante de proporcionalidad: ______ ¿Qué representa esta constante en el contexto del problema? ______

______

b) Si el automóvil viajara a 100 km/h, ¿en cuántas horas haría el recorrido? ______

Relación rapidez-tiempo en que un automóvil recorre cierta distancia



Reflexiona sobre tus resultados y, con tu profesor, busca estrategias para fortalecer tus áreas de oportunidad.

En la columna "Nota", marca una ✓ en los reactivos que resolviste correctamente.

1		23	202-207
2		23	202-207
3		24 y 25	208-221
4		24 y 25	208-221
5		25	216-221

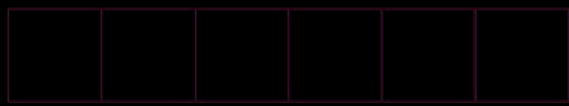
Secuencia didáctica 26

Aprendizaje esperado: Calcularás el volumen de prismas y cilindros rectos.
Contenido: Construirás el desarrollo plano de prismas rectos y calcularás su volumen.

Más prismas

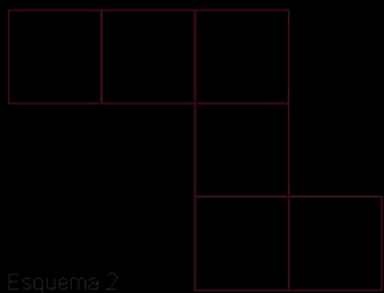
1. Reúnete con un compañero y hagan lo que se pide.

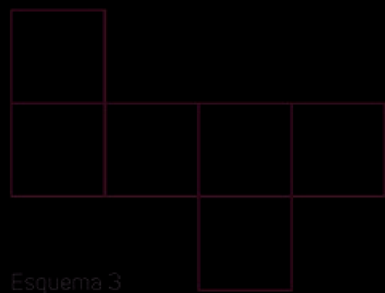
Paola quiere construir una caja con forma de cubo y dibujó sobre una cartulina el siguiente esquema para recortar el contorno y doblar por las aristas interiores.

Esquema 1


a) ¿Consideran que podrá construir la caja cúbica con el esquema anterior? ______

b) ¿Alguno de los esquemas siguientes le servirá? ______


Esquema 2

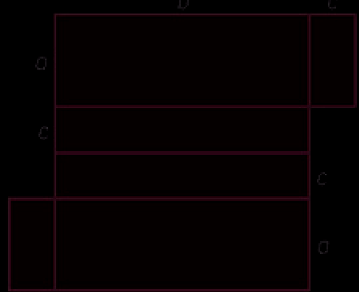

Esquema 3

c) Copien en una hoja de papel o cartulina los tres esquemas, elijan las medidas que quieran para los lados del cuadrado e intenten armar un cubo. ¿Pudieron construir el cubo? ______ En caso afirmativo, ¿con cuál o cuáles de estos pudieron?

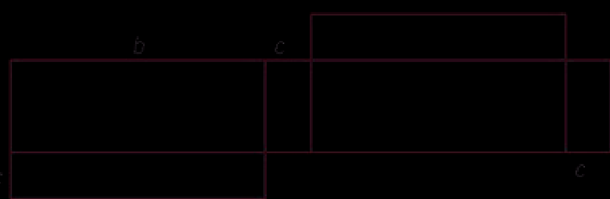
______

Discutan sus respuestas con el resto del grupo y lleguen a un acuerdo.

2. Reúnete con dos compañeros, analicen los esquemas y respondan.



Esquema 1



Esquema 2

a) ¿Con cuál de estos esquemas piensan que no se puede construir un prisma rectangular? ______ ¿Por qué? ______

______

Glosario

prisma rectangular.

b) Comprueben su respuesta copiando el esquema en una hoja de papel o cartulina e intenten armarlo. Elijan los valores que quieran para las longitudes *a*, *b* y *c*.

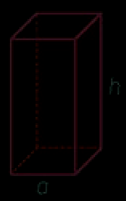
c) En una cartulina o en una hoja de papel, diseñen un esquema diferente con el que se pueda construir un prisma rectangular. Construyan el prisma para verificar que su esquema funciona.

- Discutan sus respuestas con el resto del grupo. Si entre los esquemas de los otros equipos hay alguno diferente al suyo, cópienlo y comprueben que también funciona.

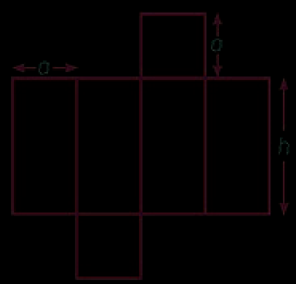
Al esquema que nos permite construir un prisma cortando por los bordes y doblando las aristas internas se le llama ***desarrollo plano*** *del prisma*.

Puede haber muchos desarrollos planos de un mismo prisma, pero algunos son más fáciles de armar que otros.

Por ejemplo, un desarrollo plano para un prisma cuadrangular es el siguiente.



Prisma cuadrangular

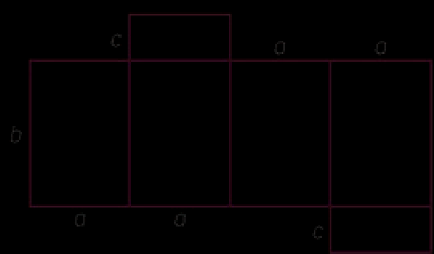


Desarrollo plano

¿Vamos bien?

Resuelve lo siguiente con base en lo que has aprendido. Al terminar, compara tus procedimientos y tus resultados con los de tus compañeros.

Analiza el esquema y responde.



¿El esquema corresponde al desarrollo plano de un prisma rectangular? ________

¿Por qué? ____

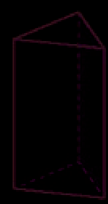
____

3. Reúnete con un compañero y hagan lo que se pide.

Glosario

prisma triangular.

La base de un prisma triangular es un triángulo equilátero con lados de 3 cm de longitud y la altura del prisma mide 6 cm.



a) ¿Cuántos triángulos debe tener el desarrollo plano del prisma? ____________

b) ¿Cuántos rectángulos debe contener el desarrollo plano del prisma? ________

¿Cuáles son las longitudes de sus lados? ____________________

c) Construyan el desarrollo plano del prisma en una cartulina o en una hoja de papel grueso. Usen las medidas dadas.

d) Si la base del prisma triangular fuera un triángulo escaleno con lados de 3, 4 y 5 cm de longitud respectivamente, ¿cuántos rectángulos debería tener el desarrollo plano del prisma? ________ ¿Serían iguales los rectángulos? ________ ¿Cuáles deben ser las longitudes de los rectángulos si la altura del prisma mide 8 cm?

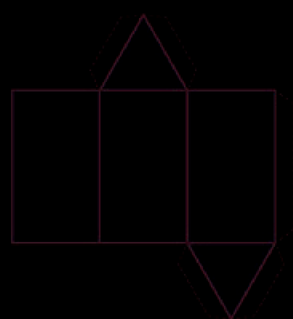
____

____

Comparen sus respuestas con las del resto del grupo y, si encuentran errores, corríjanlos.

4. Reúnete con cinco compañeros y hagan lo que se pide.

a) Al desarrollo plano que hicieron en el inciso c de la actividad 3 dibújenle unas pestañas como las de la imagen. Armen el prisma y péguenlo usando las pestañas.



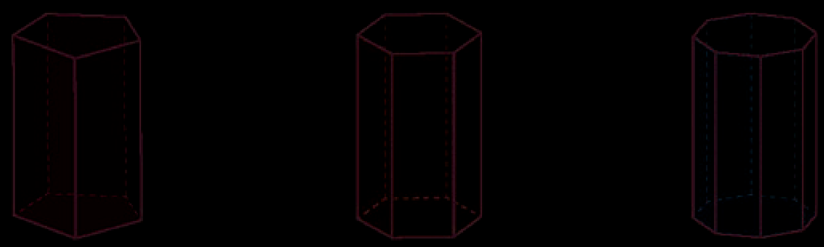
b) Junten los seis prismas que construyeron en el equipo uniendo las caras rectangulares de modo que los seis triángulos de las bases formen un hexágono.

c) ¿Cómo llamarían al cuerpo geométrico que se formó? ______________

d) En sus cuadernos hagan el desarrollo plano de este cuerpo geométrico.

Contrasten sus respuestas con las de otro equipo y después compárenlas con la información de la siguiente página.

Un **prisma poligonal** es un cuerpo geométrico limitado por dos polígonos paralelos, llamados *bases*, y por tantas caras rectangulares como lados tenga el polígono.



Los prismas poligonales se nombran en función de los polígonos que los definen, es decir, de los polígonos que conforman sus bases. Por ejemplo:

Nombre	Polígono base	Número de caras rectangulares
Prisma pentagonal	pentágono	5
Prisma hexagonal	hexágono	6
Prisma heptagonal	heptágono	7
Prisma octagonal	octágono	8

5. Reúnete con un compañero, revisen lo que hicieron en la actividad 4 y respondan.

   a) ¿Qué relación hay entre el volumen del prisma triangular que construyeron y el volumen del prisma hexagonal que se formó? ______________________

   ____

   b) Si la altura del triángulo equilátero mide 2.6 cm, la medida de su lado 3 cm y la altura del prisma triangular mide 6 cm, ¿cuánto mide el volumen del prisma triangular? ______________________

   c) ¿Cuánto medirá el volumen del prisma hexagonal? ______________________
   Expliquen su respuesta. ______________________

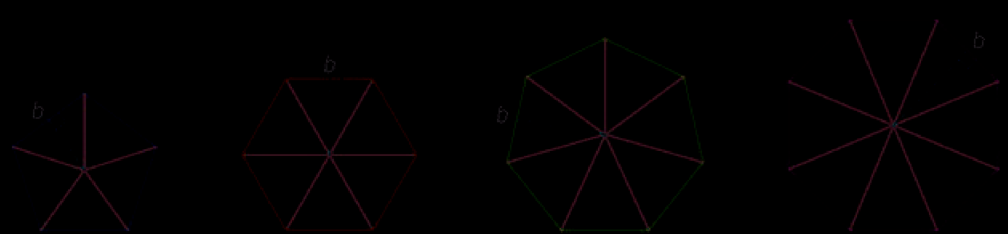
   ____

Glosario

volumen de un prisma triangular.

Discutan sus respuestas con otro equipo y lleguen a un acuerdo.

6. Reúnete con un compañero, analicen los polígonos y respondan.



Glosario

apotema.

a) ¿Qué relación hay entre la apotema del polígono regular y la altura de los triángulos en que se dividió cada polígono? ______________________

b) ¿Qué relación hay entre el área del polígono regular y el área de cada triángulo en que se dividió el polígono? ______________________

____

c) Si se construyera un prisma pentagonal con cinco prismas triangulares de altura h cuyas bases fueran triángulos con lado de longitud b y apotema de longitud a, ¿cuál expresión algebraica representaría el volumen del prisma?

____

d) Escriban los datos faltantes en la tabla, partiendo de que la longitud del lado de cada polígono mide b unidades y la apotema mide a unidades.

Prisma regular	Área del polígono regular (u^2)	Volumen de cada prisma triangular de altura h unidades (u^3)
Prisma pentagonal		
Prisma hexagonal		
Prisma heptagonal		
Prisma octagonal		

e) Si la base de un prisma de altura h es un polígono regular con lado de b unidades de longitud y apotema de a unidades, ¿cómo calcularían su volumen?

____

- Discutan sus respuestas con el resto del grupo y lleguen a un consenso. Comparen su acuerdo con la siguiente información.

El volumen de cualquier prisma poligonal se calcula multiplicando el área de la base por la altura:

$$V = \text{Área de la base} \times \text{altura} = \left(\frac{\text{Perímetro} \times \text{apotema}}{2}\right) \times \text{altura}$$

Si la base del prisma es un polígono regular con n lados de longitud b, apotema a y altura h, el volumen es igual a:

$$V = \frac{(nb) \times a}{2} \times h = \frac{nbah}{2}$$

Por ejemplo, el volumen (en cm^3) de un prisma hexagonal con lados de 3 cm de longitud, apotema de 2.6 cm y altura de 4 cm es:

$$V = \frac{(6 \times 3) \times 2.6}{2} \times 4 = \frac{46.8}{2} \times 4 = 23.4 \times 4 = 93.6\ cm^3$$

¿Vamos bien?

Resuelve lo siguiente con base en lo que has aprendido. Al terminar, compara tus procedimientos y tus resultados con los de tus compañeros.

Calcula el volumen de los prismas.

a) Prisma octagonal con altura de 10 cm, lados de 2.71 cm de longitud y apotema de 3.27 cm. ______

b) Prisma decagonal con altura de 15 cm, lados de 3.22 cm de longitud y apotema de 4.95 cm. ______

c) Prisma heptagonal con altura de 6 cm, lados de 4.53 cm de longitud y apotema de 4.7 cm. ______

Glosario

prisma decagonal

7. Responde.

a) El volumen de un prisma octagonal mide 229.4 cm^3. Si su altura mide 5 cm, ¿cuánto mide el área del octágono regular? ______

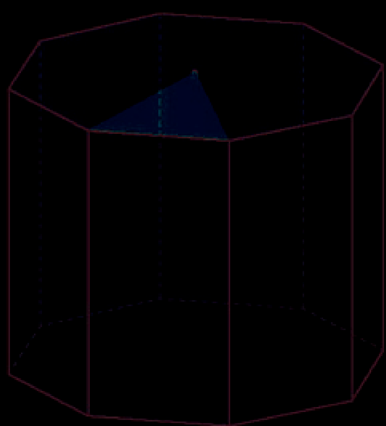
b) El volumen de un prisma pentagonal mide 96.82 cm^3. Si la altura del prisma mide 3 cm y la apotema mide 2.98 cm, ¿cuánto mide el perímetro del pentágono regular? ______ ¿Cuál es la longitud del lado del pentágono regular?

______

c) El perímetro de la base de un prisma decagonal mide 29.7 cm, su apotema mide 4.57 cm y su volumen es de 135.73 cm^3. ¿Cuánto mide la altura del prisma?

______

d) ¿Cuánto mide el área del triángulo rojo si el volumen del prisma octagonal mide 140.8 cm^3 y su altura mide 5 cm? ______



Contrasta tus resultados con los de otro compañero y, si detectas errores, corrígelos.

¿Qué aprendí?

Aplico

Trabaja los siguientes ejercicios y problemas. Al terminar, revisa tus procedimientos y tus resultados, primero con ayuda de tus compañeros y luego con tu profesor.

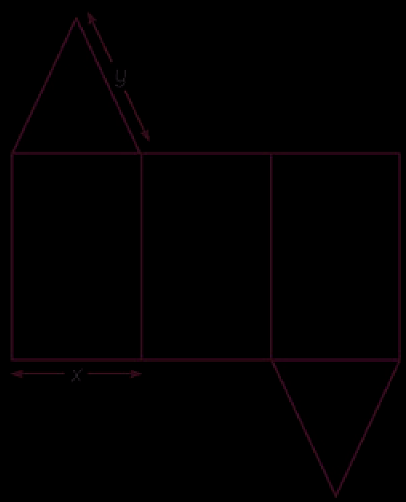
1. Dibuja el desarrollo plano de un prisma pentagonal. Los lados de la base miden 2 cm y la altura del prisma mide 3 cm.

www.esant.mx/essema2-013

2. ¿Por qué el siguiente esquema no es el desarrollo plano de un prisma triangular?

___

___



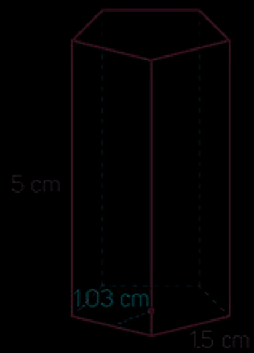
3. Calcula el volumen de los siguientes prismas.

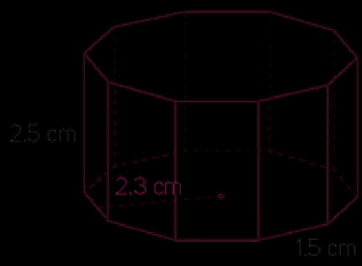
   a) Su base es un hexágono regular con lados de 3.23 cm y apotema de 2.8 cm. La altura del prisma mide 7.2 cm. ___

   b) Su base es un polígono regular de 9 lados; la longitud de los lados es de 2.73 cm y la apotema mide 3.75 cm. La altura del prisma es de 3.7 cm. ___

   c) Su base es un polígono regular de 15 lados; cada lado mide 2 cm y la apotema mide 4.71 cm. La altura del prisma es de 1.8 cm. ___

4. Analiza los prismas y responde.





a) Sin hacer los cálculos, ¿cuál de los dos prismas estimas que tiene mayor volumen? ______

b) ¿Qué elementos consideraste para hacer tu estimación? ______

c) Calcula los volúmenes y comprueba tu estimación.
Prisma pentagonal: ______ Prisma decagonal: ______

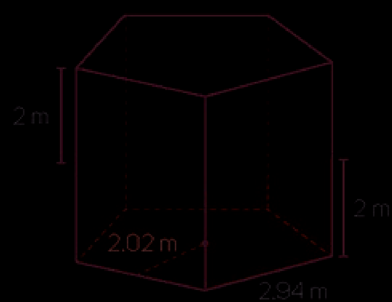
5. Responde.

a) ¿Cuál es la altura de un prisma hexagonal cuyo volumen mide 139.52 cm^3 si los lados del hexágono miden 4.1 cm y la apotema mide 3.55 cm? ______

b) Un prisma octagonal de 4 cm de altura tiene apotema de 3.72 cm y su volumen mide 183.52 cm^3. ¿Cuánto mide el lado del octágono regular? ______

c) ¿Cuánto mide la apotema de un prisma heptagonal de 5 cm de altura y cuyo volumen mide 199.85 cm^3 si se sabe que el lado del heptágono regular mide 3.32 cm? ______

6. Un depósito con forma de prisma pentagonal tiene agua hasta la mitad de la altura.



a) ¿Cuál es el volumen del depósito? ______

b) ¿Cuál es la capacidad (en litros) del depósito? ______

c) ¿Cuánta agua hay en el depósito? ______

Glosario

capacidad.

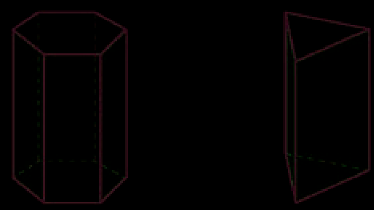
Marca con una ✓ la casilla que describe tu desempeño.		
Construyo el desarrollo plano de prismas rectos y calculo su volumen.		
Nivel de logro	A	Requiero ayuda para realizarlo.
		Lo hago, pero en ocasiones necesito ayuda.
	C	Lo hago de manera autónoma.

Secuencia didáctica 27

Aprendizaje esperado: Calcularás el volumen de prismas y cilindros rectos.
Contenido: Calcularás el volumen de cilindros rectos.

De los prismas al cilindro

1. Analiza los prismas y responde.



a) Si los dos prismas tienen la misma altura *h*, ¿cuál de ellos consideras que tiene mayor volumen? ______

b) ¿Qué datos adicionales necesitarías para comprobar tu respuesta? ______

______

c) Si el perímetro del triángulo mide 5.2 cm y su apotema mide 0.5 cm, ¿cuál es el volumen del prisma triangular? ______

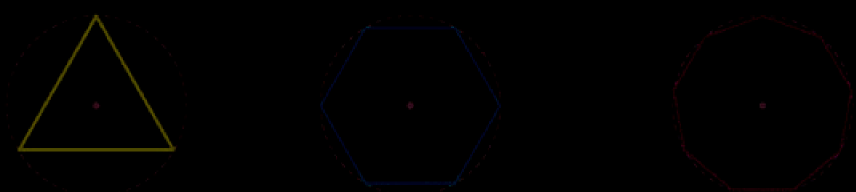
d) Si el perímetro del hexágono mide 6 cm y su apotema mide 0.87 cm, ¿cuál es el volumen del prisma hexagonal? ______

e) ¿Coinciden los resultados de los incisos *c* y *d* con la respuesta que diste en el inciso *a*? ______

Compara tus respuestas con las de otro compañero y, si detectas errores, corrígelos.

2. Reúnete con un compañero, analicen los polígonos y respondan.

Los tres polígonos regulares están inscritos en una circunferencia con radio de 3 cm.



Longitud del lado = 5.2 cm Longitud del lado = 3 cm Longitud del lado = 2.05 cm

a) ¿Cuánto mide el perímetro del triángulo? ______ ¿Y el del hexágono? ______ ¿Cuál es el perímetro del polígono de 9 lados? ______
¿Cuál es el perímetro de la circunferencia? Usen 3.14 como aproximación al valor de π. ______

b) Si se inscribe un polígono regular de 10 lados en una circunferencia con radio de 3 cm, ¿su perímetro será mayor o menor que el del polígono regular de 9 lados? ______ ¿Por qué? ______

______

c) ¿El perímetro de un polígono regular de n lados inscrito en una circunferencia con radio de 3 cm es mayor o menor que el de un polígono regular de $n + 1$ lados inscrito en la misma circunferencia? ______ Expliquen su respuesta. ______

______

d) ¿El perímetro de cualquier polígono regular inscrito en una circunferencia puede ser mayor que el perímetro de la circunferencia? ______

- Discutan sus respuestas con otra pareja y, si encuentran diferencias, lleguen a un acuerdo.

3. Continúa trabajando con tu compañero y hagan lo que se pide.

a) En la tabla están registrados datos de polígonos regulares inscritos en una circunferencia con radio de 3 cm. Escriban los datos faltantes.

Núm. de lados del polígono regular	Perímetro del polígono (cm)	Apotema (cm)	Área del polígono (cm^2)
3	15.6	1.5	
4	16.96	2.12	
5	17.65	2.43	
6	18	2.6	
8	18.37	2.77	
10	18.54	2.85	
12	18.63	2.9	

b) Si se construyeran prismas de 4 cm de altura cuyas bases son los polígonos de la tabla anterior, ¿cuál sería el volumen de cada uno? Escriban los resultados en la siguiente tabla.

Prisma	Área de la base (cm^2)	Volumen (cm^3)
Triangular		
Cuadrangular		
Pentagonal		
Hexagonal		
Octagonal		
Decagonal		
Dodecagonal		

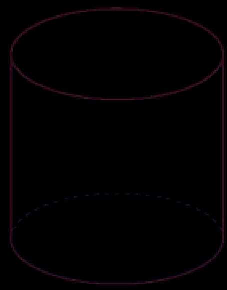
Glosario

prisma dodecagonal

- Comparen sus respuestas con las de otra pareja y, si detectan errores, corríjanlos.

4. Sigue trabajando con tu compañero y respondan.

a) ¿Cómo se llama el siguiente cuerpo geométrico? ______________



b) ¿Qué diferencia hay entre este cuerpo y los prismas poligonales que han estudiado en este curso? ______________

c) ¿Cuál es el área del círculo con radio de 3 cm de longitud? Usen 3.14 como aproximación al valor de π. ______________ ¿Hay mucha diferencia entre la apotema del dodecágono y el radio de ese círculo? ______________ ¿Hay mucha diferencia entre el área de este círculo y el área del dodecágono de la actividad anterior? ______________

d) Si el círculo de la base del cilindro tiene un radio de 3 cm y su altura mide 4 cm, ¿piensan que habrá mucha diferencia entre su volumen y el del prisma dodecagonal de la actividad anterior? ______________ ¿Habrá mucha diferencia con el volumen de un prisma de 4 cm de altura y cuya base sea un polígono regular de 1000 lados inscrito en una circunferencia de 3 cm de radio? ______________

e) ¿Qué harían para calcular el volumen de este cuerpo geométrico? ______________

Discutan su propuesta con el resto del grupo y lleguen a un acuerdo. Comparen su acuerdo con la siguiente información.

El volumen de un cilindro de altura h y base de radio r es:

$$\text{Volumen} = \text{Área de la base} \times \text{altura} = (\pi \times r^2) \times h = \pi r^2 h$$

Por ejemplo, el volumen de un cilindro de 4 cm de altura y base con radio de 3 cm es:

$$V = (\pi \times 3^2) \times 4 = 36\pi \text{ cm}^3$$

Si se usa 3.14 como aproximación al valor de π, el volumen es: 113.04 cm^3.

¿Vamos bien?

Resuelve lo siguiente con base en lo que has aprendido. Al terminar, compara tus procedimientos y tus resultados con los de tus compañeros.

I. Calcula el volumen de los cilindros. Usa 3.14 como aproximación al valor de π.

a) Radio de la base de 4 cm y altura de 10 cm ______________________

b) Radio de la base de 3.5 cm y altura de 3 cm ______________________

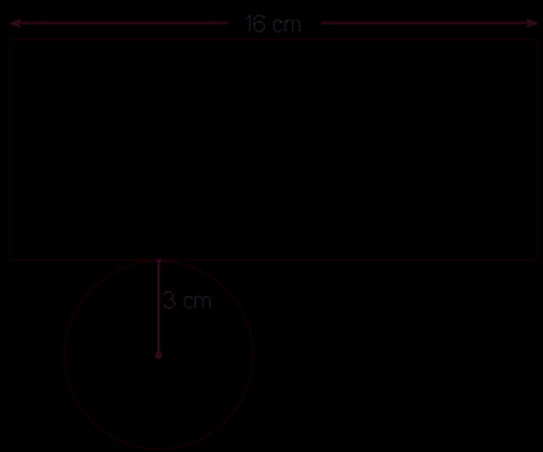
II. Encuentra los datos que se piden. Usa 3.14 como aproximación al valor de π.

a) Si el volumen de un cilindro mide 37.68 m^3 y el área de su base mide 12.56 m^2, ¿cuánto mide su altura? ______________________

b) Si el volumen de un cilindro mide 251.2 cm^3 y su altura mide 5 cm, ¿cuál es el área de la base? ____________ ¿Cuánto mide su radio? ____________

5. Lee la información, analiza el esquema y responde.

Julián quiere hacer un cilindro de cartón y para ello trazó el siguiente esquema.



a) ¿El esquema es adecuado para construir el cilindro? ______________________

b) ¿Qué elementos debe considerar Julián para hacer el desarrollo plano de un cilindro? ______________________

____

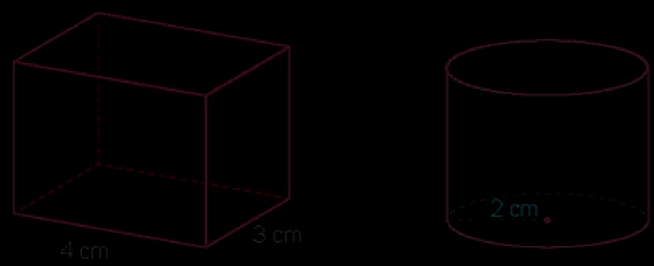
c) ¿Hay alguna relación entre la longitud del largo del rectángulo y el perímetro de la circunferencia? __________ ¿Cuál es esa relación? ______________________

d) Dibuja en tu cuaderno el desarrollo plano de un cilindro con base de radio 2 cm y altura 3 cm. Usa 3.14 como aproximación al valor de π.

Compara tus respuestas con las de otro compañero y, si detectas errores, corrígelos.

6. Lee el texto, analiza los cuerpos geométricos y responde.

El depósito con forma de prisma rectangular está lleno de agua. Se quiere verter su contenido en el depósito cilíndrico. Los dos depósitos tienen la misma altura.



a) ¿Cabrá toda el agua en el depósito cilíndrico? ______________________

b) ¿Cuál de las bases estimas que tiene mayor área? ______________ Explica tu respuesta. ____

____

____

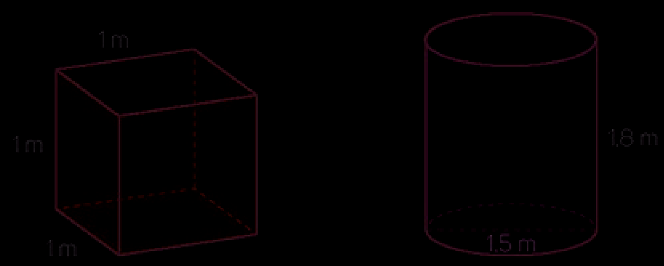
c) Comprueba tus respuestas calculando los volúmenes de los dos depósitos.

____

Compara tus respuestas con las de otro compañero y, si detectas errores, corrígelos.

7. Reúnete con un compañero y respondan.

La familia de Agustín tiene una cisterna cúbica de 1 m de arista con agua. Mediante una bomba, la cisterna llena un tinaco cilíndrico que se encuentra en la azotea. El cilindro tiene una altura de 1.8 m y el diámetro de su base mide 1.5 m. El consumo diario de agua de la familia de Agustín es de 0.15 m^3.



a) ¿Cuál es la capacidad (en litros) de la cisterna? ______________________

b) ¿Cuál es la capacidad (en litros) del tinaco? ______________________

c) ¿Para cuántos días les alcanza el agua de la cisterna? ______________________

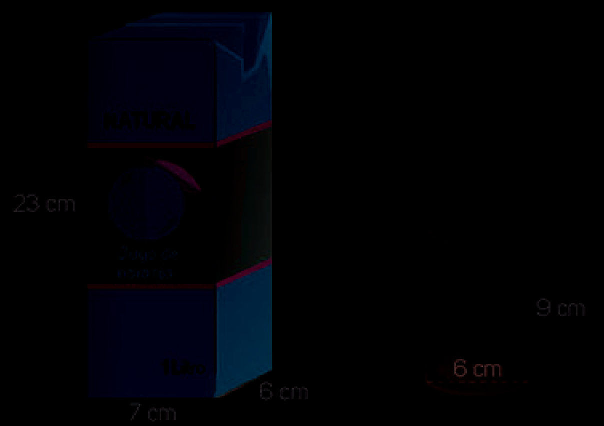
Expliquen cómo obtuvieron la respuesta. ______________________

____

Comparen sus respuestas con las de otra pareja y, si detectan errores, corríjanlos.

8. Reúnete con un compañero, lean el texto y respondan.

Elisa y Juan Manuel compraron cuatro jugos de naranja de la marca Natural y quieren repartirlos en diez vasos cilíndricos como los de la imagen.



a) ¿Cuál es la capacidad de un recipiente de jugo? ____________________

b) ¿Cuál es la capacidad de cada vaso? Usen 3.1416 como aproximación al valor de π. ____________________

c) ¿Son suficientes los cuatro jugos que compraron o deben comprar más? __________ ¿Por qué? ____________________

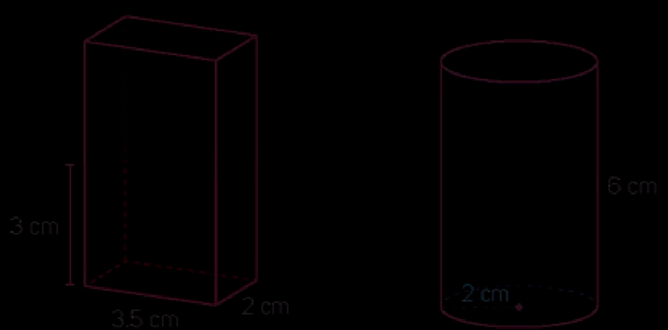
d) Si piensas que deben comprar más, ¿cuántos más? ____________________

e) ¿Deben seguir comprando jugos de esa marca? ____________________ ¿Por qué? ____________________

- Contrasten sus respuestas con las de otra pareja y, si detectan errores, corríjanlos.

9. Sigue trabajando con tu compañero, analicen las imágenes y respondan.

El recipiente con forma de prisma rectangular tiene agua hasta la mitad de su altura.



a) Si se vierte el contenido del prisma en el recipiente cilíndrico, ¿a qué altura aproximada llegará el agua? Antes de hacer los cálculos, hagan una estimación.

b) Comprueben su estimación haciendo los cálculos y determinen la altura a la que llegará el agua. Usen 3.14 como aproximación al valor de π.

- Contrasten sus respuestas con las de otra pareja y, si detectan errores, corríjanlos.

¿Qué aprendí?

Aplico

Trabaja los siguientes ejercicios y problemas. Al terminar, revisa tus procedimientos y tus resultados, primero con ayuda de tus compañeros y luego con tu profesor.

1. Para responder, usa 3.14 como aproximación al valor de π. Escribe las operaciones que hiciste.

   a) ¿Cuál es el volumen de un cilindro de 17 dm de altura cuya base tiene un diámetro de 10 dm?

   Operaciones:

   Resultado:

   b) ¿Cuál es la altura de un cilindro con volumen de 602.88 cm^3 y radio de 2 cm?

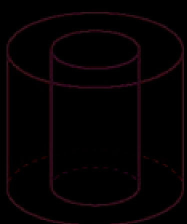
   Operaciones:

   Resultado:

   c) ¿Cuánto mide el radio de la base de un cilindro con volumen de 367.38 m^3 y altura de 13 m?

   Operaciones:

   Resultado:



2. ¿Cuál es el volumen del espacio comprendido entre los cilindros de 4 cm de altura si el radio del cilindro exterior mide 3 cm y el radio del cilindro interior mide 1.5 cm? Usa 3.14 como aproximación a valor de π.

Escribe las operaciones que hiciste para resolver el problema 2.

www.esant.mx/essema2-014

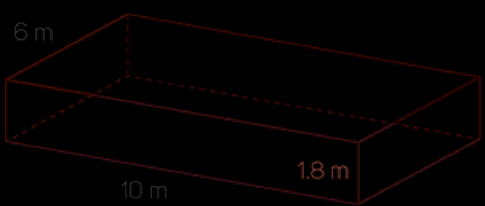
3. ¿Cuál es la capacidad de un cilindro para gas de 72 cm de altura y diámetro de 30 cm? Usa 3.14 como aproximación a valor de π.

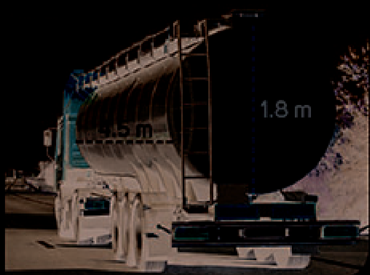
Escribe las operaciones que hiciste.

4. ¿Cuántos litros de jugo hay en 10 vasos cilíndricos de 9 cm de altura y diámetro de 6 cm si los vasos están llenos hasta dos terceras partes de su capacidad?

Escribe las operaciones que hiciste.

5. Para llenar una alberca rectangular, se contratará el servicio de pipas de agua.





¿Cuántas pipas deberán contratarse si el agua de la alberca debe estar 20 cm debajo del nivel superior? ____________________

Escribe las operaciones que hiciste.

Marca con una ✓ la casilla que describe tu desempeño.

Calculo el volumen de cilindros rectos.		
Nivel de logro	A	Requiero ayuda para realizarlo.
	B	Lo hago, pero en ocasiones necesito ayuda.
	C	Lo hago de manera autónoma.

Un alto en la espiral

Realiza lo que se indica. Con base en tus resultados y con ayuda de tu profesor, identifica las secuencias correspondientes a los contenidos que debes repasar.

1. Calcula los datos que se piden y escribe el procedimiento que seguiste en cada caso.

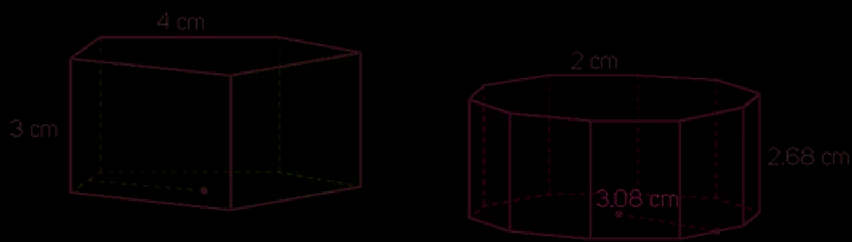
   a) El área de la base de un prisma hexagonal mide 21.625 cm^2, la apotema del hexágono regular mide 2.5 cm y el volumen del prisma mide 173 cm^3. ¿Cuánto mide la altura del prisma? ____________________

   b) El volumen de un prisma triangular, cuya base es un triángulo equilátero, mide 58.5675 m^3, su altura mide 6 m y el perímetro de su base mide 14.25 m. ¿Cuánto mide la apotema del triángulo? ____________________

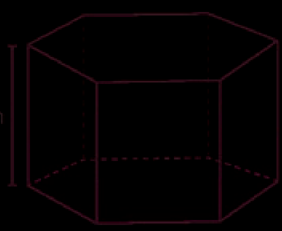
   c) El volumen de un prisma pentagonal de 5 cm de altura mide 97.9 cm^3 y la apotema del pentágono regular mide 2.32 cm. ¿Cuánto mide el lado del pentágono?

   ____

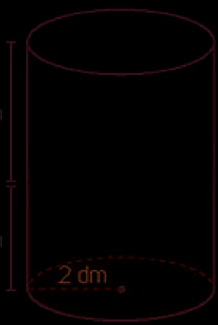
2. Los dos prismas de la imagen tienen el mismo volumen de 82.5 cm^3 y los perímetros de los polígonos regulares de la base miden lo mismo. ¿Cuánto mide la apotema del prisma pentagonal? ____________________



3. Un depósito hexagonal de 3 m de altura y cuya base tiene un área de 16.2 m^2 está lleno a la tercera parte de su capacidad. ¿Cuántos litros hay en el depósito? ________

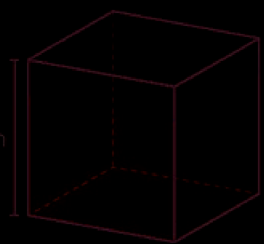


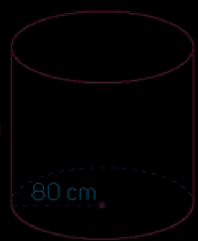
4. ¿Cuántos litros de agua hay en el depósito cilíndrico? Usa 3.14 como aproximación al valor de π. ________ ¿Cuántos litros faltan para llenarlo? ________



5. Una cisterna cúbica de 1.5 m de arista está llena de agua a tres cuartas partes de su capacidad. Se quiere vaciar el contenido de la cisterna en un tinaco cilíndrico de 1.5 m de altura y radio de 80 cm.

   a) ¿Estimas que cabrá toda el agua de la cisterna en el tinaco? ________





   b) Comprueba tu respuesta anterior haciendo los cálculos necesarios. Usa 3.14 como aproximación al valor de π. ¿Cabe toda el agua de la cisterna en el tinaco? ________ ¿Por qué? ________

____

____

____

Reflexiona sobre tus resultados y, con tu profesor, busca estrategias para fortalecer tus áreas de oportunidad.

En la columna "Nota", marca una ✓ en los reactivos que resolviste correctamente.

[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1		26	228-235
2		26	228-235
3		26	228-235
4		27	236-243
5		26 y 27	228-243

Secuencia didáctica

28

Aprendizaje esperado: Determinarás la probabilidad teórica de un evento en un experimento aleatorio.
Contenido: Determinarás la probabilidad teórica de un evento en un experimento aleatorio.

En teoría, es probable

1. En parejas, analicen la situación y hagan lo que se pide.

En una secundaria se registró el grupo sanguíneo de varios estudiantes y si su sangre contiene la proteína llamada *Rhesus* o no (RH+ o RH−). En la tabla se muestran los datos.

	Grupo sanguíneo			
Factor				
RH+	3	4	2	5
RH−	4	2	4	6

a) ¿Cuántos estudiantes se hicieron el análisis de sangre? ___

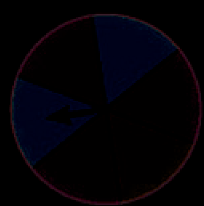
b) Del total de estudiantes, ¿cuántos tienen tipo de sangre AB? ___
¿Cuántos tienen tipo de sangre O? ___ ¿Cuántos tienen factor RH+? ___ ¿Y RH−? ___

c) Si se elige un estudiante al azar, ¿qué es más fácil que ocurra: que tenga sangre tipo AB o que tenga tipo O? ___ ¿Por qué? ___

d) Si se elige un estudiante al azar, ¿qué es más fácil que ocurra: que tenga sangre tipo B con factor RH+ o tipo O con factor RH−? ___
¿Por qué? ___

Comenten sus respuestas con sus compañeros, den sus argumentos y analicen los de ellos.

2. En un juego, se hace girar la flecha de la ruleta y se apuesta a un color. Observa la ruleta y responde.



a) ¿En cuántas partes está dividida la ruleta? ___
¿Todas las partes son del mismo tamaño? ___

b) ¿Qué fracción de la ruleta es de color verde? ___ ¿Qué fracción es de color rojo? ___ ¿Y de color azul? ___

c) ¿Cuál es la suma de las fracciones del inciso *b*? ___

d) Al girar la flecha, ¿qué es más fácil que ocurra: que termine apuntando al rojo o al verde? ____________ ¿Por qué? ____________

____

Compara tus respuestas con las de otros estudiantes. Si tienen diferencias, analicen sus argumentos y lleguen a un acuerdo.

Experimento aleatorio o juego de azar

Un **experimento aleatorio o juego de azar** es aquel en el que se conocen todos los posibles resultados antes de que se realice, pero no se puede predecir cuál ocurrirá. Por ejemplo, al lanzar una moneda al aire, sabemos que caerá águila o sol, pero no podemos predecir cuál de las dos caras caerá.

En un experimento aleatorio o juego de azar...

- El conjunto de todos los resultados posibles se llama *espacio muestral*.
- Un evento es un resultado posible o un conjunto de resultados con una característica común.
- El número de veces que puede obtenerse como resultado un evento se llama *número de casos favorables*.

En el ejemplo de lanzar una moneda al aire, el número de resultados posibles es 2; uno es "cae águila", y el otro es "cae sol". El espacio muestral es {águila, sol}.

Al lanzar un dado cúbico al aire, los resultados posibles son 6: cae 1, 2, 3, 4, 5 o cae 6; un evento es "cae un número mayor que 2". El grupo de resultados con esa característica común es "cae 3", "cae 4", "cae 5" y "cae 6".

¿Vamos bien?

Resuelve los ejercicios con base en lo que has aprendido. Al terminar, compara tus resultados con tus compañeros. Corrijan si es necesario.

Se lanzan dos monedas al aire para ver qué cara cae hacia arriba.

a) ¿Cuáles son todos los resultados posibles? ____________

____

b) De todos los resultados posibles...

¿Cuántos casos son favorables al evento "caen dos águilas"? ____________

¿Cuántos son favorables al evento "cae un águila y un sol"? ____________

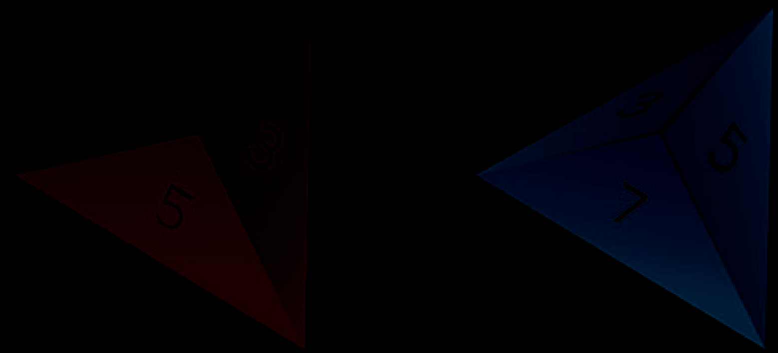
¿Cuántos son favorables al evento "cae lo mismo en las dos monedas"? ____________

¿Es posible que caiga un águila y dos soles? ____________ ¿Por qué? ____________

____

3. En equipo, revisen el texto y hagan lo que se indica.

Dos dados tetraédricos iguales, como los de la imagen, tienen en sus caras los números 1, 3, 5 y 7, uno en cada una. Se realiza el experimento de lanzar los dados juntos al aire y ver qué números quedaron en las caras que quedan cubiertas (contra el piso).



a) Completen la tabla escribiendo todos los resultados posibles de este experimento.

	1	3	5	7
1	(1, 1)			
3			(3, 5)	
5				
7	(7, 1)			(7, 7)

b) ¿Cuántos son todos los posibles resultados? ______

c) ¿Cuántos casos son favorables al evento "quedan cubiertos un 3 y un 5"? ______

¿Qué fracción representa este número del total de resultados? ______

¿Cuál dirías que es la probabilidad de este evento? ______

d) ¿Cuántos casos son favorables al evento "quedan cubiertos dos números iguales"? ______ ¿Qué fracción representa este número del total de resultados? ______ ¿Cuál dirías que es la probabilidad de este evento? ______

e) ¿Qué fracción es menor: la del inciso *c* o la del *d*? ______

¿Qué es más probable que ocurra: que salgan un 3 y un 5 o que salgan dos números iguales? ______

f) ¿Qué es más probable: que salgan 7 y 1 o que salgan 3 y 7? ______ ¿Por qué? ______

______

Comparen su tabla, sus resultados y sus respuestas con las de otros equipos. Discutan sus argumentos y compárenlos con el texto de la siguiente página. De ser necesario, regresen a corregir.

La probabilidad teórica de que ocurra un evento es un número que mide la facilidad con que se puede obtener ese resultado si se realiza el juego o experimento aleatorio.

La probabilidad teórica de un evento es igual al cociente del número de casos favorables a ese evento entre el número total de resultados posibles. Si se denota el evento con la letra E, la probabilidad de que ocurra se denota así: P(E).

$$\text{Probabilidad de E} = P(E) = \frac{\text{Número de casos favorables al evento E}}{\text{Número de todos los posibles resultados}}$$

Por ejemplo, en el experimento de sacar de una urna, al azar, dos de tres pelotas numeradas del 1 al 3 y registrar los números, el espacio muestral son todos los posibles resultados que se muestran en la tabla. En total, 9.

(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)
(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)
(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)

Considerando el evento A, "sale el mismo número", el número de casos favorables es 3: (1, 1), (2, 2) y (3, 3). Por tanto, la probabilidad del evento A es $P(A) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.
Para el evento B, "los números que salen suman 3", los casos favorables son 2: (1, 2) y (2, 1). Entonces, $P(B) = \frac{2}{9}$.

¿Vamos bien?

Resuelve lo siguiente con base en lo que has aprendido. Al terminar, compara tus procedimientos y tus resultados con los de tus compañeros.

Se lanza un dado cúbico al aire. Considera los siguientes eventos:

A: Sale 5.
B: Sale un número mayor que 2.
C: Sale un número impar.
D: Sale un número impar mayor que 2.

a) ¿Cuál es el espacio muestral? ______

b) Calcula la probabilidad de cada evento.

P(A) = ______ P(C) = ______

P(B) = ______ P(D) = ______

c) ¿Es posible que salga el número 0? ______ ¿Cuál es la probabilidad del evento "sale 0"? ______

4. En parejas, lean el texto y hagan lo que se indica.

En una urna hay cinco bolas color de rosa y tres azules. Un experimento consiste en extraer una bola al azar, se anota su color, y se regresa a la urna. Se repite la misma operación dos veces más. Quedan tres colores anotados.

a) ¿Cuál es el espacio muestral? ______

b) Calculen la probabilidad de los siguientes eventos.

D: No sale ninguna bola color de rosa. ______

E: Salen dos bolas color de rosa. ______

F: Salen tres bolas color de rosa. ______

Comparen sus respuestas y las probabilidades que calcularon con las de sus compañeros. Si tienen diferencias, analícenlas y asegúrense de haber determinado correctamente todos los resultados posibles.

5. Simulen el experimento de la actividad anterior.

En cinco papeles del mismo tamaño anoten "rosa" y en tres papeles escriban "azul". Doblen los papeles y mézclenlos en una caja o bolsa oscura.
Saquen de la bolsa un papel al azar. En una hoja anoten el color que dice el papel, doblen el papel de nuevo, regréselo a la bolsa y agiten la bolsa; repitan la operación dos veces más.

Repitan el experimento 40 veces. Cada vez que hagan el experimento, después de extraer un papel regréselo a la bolsa antes de sacar el siguiente.

a) ¿Cuántas veces el resultado fue ningún "rosa"? ______

¿Cuántas veces fue dos "rosa"? ______

¿Cuántas veces el resultado fue tres "rosa"? ______

b) Calculen la probabilidad frecuencial de cada resultado del inciso anterior.

0 "rosa": ______

2 "rosa": ______

3 "rosa": ______

c) Comparen la probabilidad frecuencial de los tres eventos, con la probabilidad teórica que calcularon en la actividad 4, inciso *b*. ¿Consideran que se parecen?

______

Glosario

probabilidad frecuencial

Expongan ante el grupo su trabajo y escuchen a sus compañeros. Registren el número de veces que repitieron el experimento sus demás compañeros y el número de veces que obtuvieron cada resultado.

6. Continúen trabajando en parejas.

En su cuaderno, completen una tabla de frecuencias como la siguiente, con los resultados de las repeticiones realizadas por todas las parejas de estudiantes del grupo.

Pareja	Extracciones triples	Frecuencias		
1	40			
2	40			
3	40			
⋮				
Total				

a) ¿Cuántas veces se realizó el experimento? __________

b) Calculen la probabilidad frecuencial de cada resultado.

0 "rosa": __________

2 "rosa": __________

3 "rosa": __________

c) Comparen la probabilidad frecuencial del inciso anterior, con la probabilidad teórica que calcularon en la actividad 4, inciso *b*.

¿Consideran que son parecidas? __________ ¿Qué tanto? __________

d) Si se repite el experimento mil veces, ¿qué esperan que ocurra con el valor de la probabilidad frecuencial? __________

Expongan ante el grupo la probabilidad frecuencial que calcularon para los distintos resultados, den a conocer sus respuestas y arguméntenlas.

La probabilidad frecuencial es una estimación o aproximación a la probabilidad teórica. Cuantas más veces se repita un experimento en las mismas condiciones, la probabilidad frecuencial de un resultado se aproxima más a su probabilidad teórica.

Por ejemplo, una moneda que fue lanzada al aire 1000 veces y 547 veces cayó águila. Su probabilidad frecuencial es:

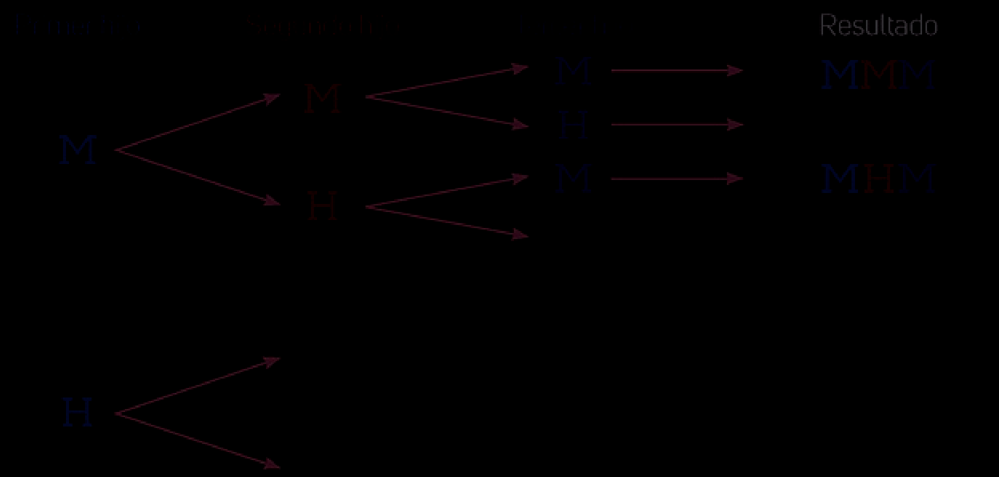
$$\frac{547}{1000} = 0.547$$

Pero la probabilidad teórica de que caiga águila es exactamente: $\frac{1}{2} = 0.5$.

7. Lee el texto y haz lo que se indica.

Unos recién casados planean tener tres hijos y estudian la probabilidad de tener dos hombres y una mujer, o dos mujeres y un hombre.

a) ¿Cuáles son todos los resultados posibles? Completa el diagrama de árbol para hacer el recuento. El resultado "mujer" se simboliza con M, y el resultado "hombre" con H.



b) Calcula la probabilidad de los eventos.

A: El primer hijo es mujer. ____________

B: Dos de los tres hijos son mujeres. ____________

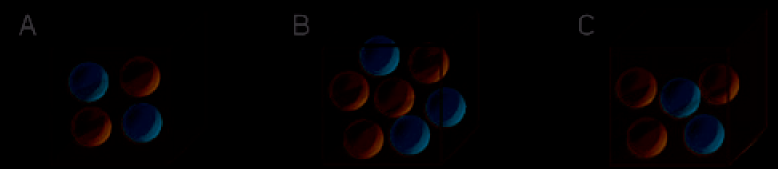
- Compara tus respuestas con las de otros estudiantes. Corrige si es necesario.

Aplico

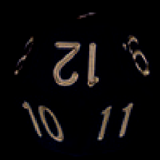
¿Qué aprendí?

Trabaja los siguientes ejercicios y problemas. Al terminar, revisa tus procedimientos y tus resultados, primero con ayuda de tus compañeros y luego con tu profesor.

1. ¿De cuál urna es más probable sacar una bola azul? Explica tu respuesta.



2. Se lanza al aire un dado dodecaedro como el de la imagen, con las doce caras pentagonales numeradas del 1 al 12.



a) Escribe el espacio muestral.

b) Calcula la probabilidad de los eventos:

A: Cae un número mayor que 4.

B: Cae un número impar.

C: Cae el número 15.

D: Cae un número impar menor que 8.

3. Dentro de una botella hay 30 canicas de colores rojo, amarillo y verde. La botella está pintada de negro y no se ve el color de las canicas, pero está tapada con un plástico traslúcido de forma que, si se voltea de cabeza, se puede observar el color de la única canica que queda contra la tapa.

Se realizó mil veces el experimento de voltear de cabeza la botella y anotar el color de la canica que se podía ver en la tapa. Se obtuvieron los resultados que se muestran en la tabla.

Color de la canica	Frecuencia con que se observó contra la tapa	Probabilidad frecuencial
Roja	288	
Verde	192	
Amarilla	520	

a) Completa la tabla anterior. Escribe la probabilidad frecuencial como número decimal.

b) Denota con *r* el número de canicas rojas que hay en la botella, con *v* el de las verdes y con *a* el de las amarillas. Completa la expresión algebraica que permite calcular la probabilidad teórica de que al voltear la botella se vea una canica roja, una verde y una amarilla, respectivamente.

P(roja) = r　　　P(verde) =　　　P(amarilla) =

c) Estima el número de canicas de cada color que hay en la botella. Escribe tu procedimiento.

Rojas:

Verdes:

Amarillas:

Marca con una ✓ la casilla que describe tu desempeño.

Contenido

Determino la probabilidad teórica de un evento en un experimento aleatorio.

Nivel de logro

A Requiero ayuda para realizarlo.

B Lo hago, pero en ocasiones necesito ayuda.

C Lo hago de manera autónoma.

Secuencia didáctica

29

Aprendizaje esperado: Usarás e interpretarás las medidas de tendencia central (moda, media aritmética y mediana), el rango y la desviación media de un conjunto de datos y decidirás cuál de ellas conviene más en el análisis de los datos en cuestión.
Contenido: Usarás e interpretarás las medidas de tendencia central (moda, media aritmética y mediana), el rango y la desviación media de un conjunto de datos y decidirás cuál de ellas conviene más en el análisis de los datos en cuestión.

Dispersión

1. En parejas, analicen la situación y hagan lo que se indica.

En un estado del país se organizó un hexatlón entre los estudiantes de secundaria. En la rama varonil quedaron tres finalistas empatados con la misma puntuación. Para decidir cómo asignar los primeros tres lugares, los jueces revisaron la tabla con el registro de las faltas cometidas por los finalistas durante las seis competencias.

	Faltas cometidas por los competidores en cada prueba					
Competencia	A	B	C	D	E	F
	2	5	1	4	5	1
	5	3	2	4	1	3
	1	4	4	2	5	2

a) Ordenen de menor a mayor las faltas cometidas por cada finalista en las competencias.

David: ______

Aarón: ______

Jesús: ______

b) Completen la tabla con la información anterior.

	Total de faltas	Moda de las faltas	Faltas promedio	Mediana de las faltas	Rango de las faltas
David					
Aarón					
Jesús					

c) El promedio de faltas, la moda, la mediana o el rango, ¿ayudan a decidir a quién asignar el primero, segundo y tercer lugar? ______

d) ¿Quién cometió más de tres faltas en un mayor número de pruebas? ______

Revisen con otros estudiantes sus medidas de tendencia central, el rango y sus respuestas. Si tienen discrepancias, analícenlas y lleguen a un acuerdo. Después discutan sobre cómo determinar el orden de los primeros tres lugares.

Glosario

moda de una colección de datos.

promedio o media aritmética.

mediana de una colección de datos.

rango de una colección de datos.

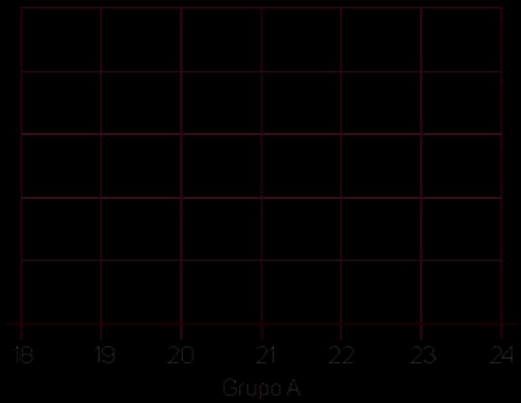
2. Lee el texto y haz lo que se indica.

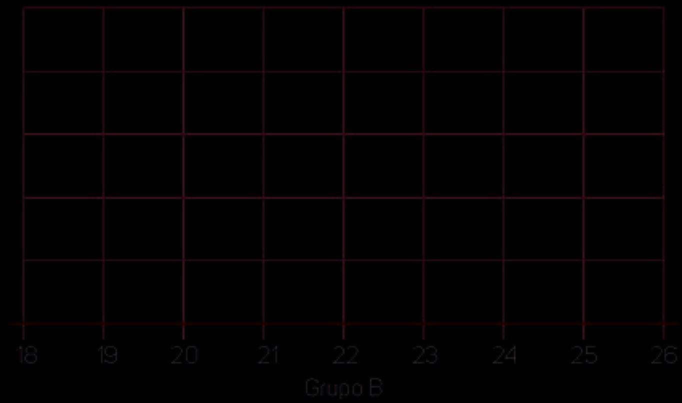
En una universidad se preguntó la edad en dos grupos de alumnos. En la tabla se muestran las edades de cada grupo.

Grupo	Edades					Suma de edades	Promedio de edades
	19	20	21	22	23		
	18	20	22	24	26		

a) Completa la tabla anterior.

b) En la línea azul del grupo A, traza un punto en cada una de las edades. Haz lo mismo en el grupo B.





c) ¿En qué grupo son más dispersas las edades? ______

d) ¿Cuál es la separación entre dos puntos consecutivos del grupo A? ______

¿Y del B? ______

e) Reflexiona si hay alguna relación entre tus respuestas de los incisos *c* y *d*. Describe tu conclusión. ______

______

f) En la línea azul del inciso *b* que corresponde al grupo A, ubica la edad media y, a partir de ahí, en color rojo traza una línea perpendicular a la azul. Después, traza segmentos horizontales que se inicien en cada calificación y terminen en la línea roja que trazaste; usa las distintas líneas para que los segmentos no se encimen. Realiza los mismos trazos en las líneas correspondientes al grupo B.

g) ¿En qué grupo son más largos los segmentos que trazaste en el inciso anterior, en el A o en el B? ______ ¿Consideras que tiene que ver con tus respuestas en los incisos *c* y *d*? ______

______

Compara tu tabla, tus trazos y tus respuestas con las de tus compañeros. Grupalmente discutan qué representa la longitud de los segmentos que trazaron.

3. En equipos, lean el texto y hagan lo que se indica.

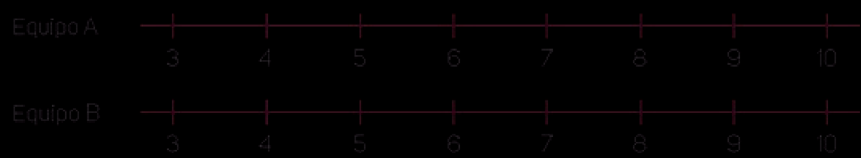
En un examen que se aplicó a dos equipos con cinco integrantes cada uno, los estudiantes tuvieron las calificaciones que se muestran en la siguiente tabla.

Calificaciones					Suma	Media	Rango
3	6	7	8	10			
3	5	7	9	10			

a) Completen la tabla anterior.

b) ¿Cuál de los equipos salió mejor? ______________________

c) Sobre la primera línea, tracen un punto rojo en las calificaciones del equipo A y, sobre la segunda línea, un punto azul sobre las calificaciones del equipo B. En las dos líneas tracen un punto verde en la ubicación de la calificación media.



d) Completen los enunciados.

En el equipo __________ son más dispersas las calificaciones.

En el equipo __________ son menos dispersas las calificaciones.

e) En la siguiente tabla escriban la distancia que hay de la calificación media a cada calificación, así como, la suma de esas distancias.

Calificaciones en el equipo A	3	6	7	8	10	Suma

Calificaciones en el equipo B	3	5	7	9	10	Suma

f) Para cada equipo, escriban el promedio de las distancias del inciso anterior.

Equipo A: ______________________ Equipo B: ______________________

g) ¿Consideran que los promedios del inciso anterior tienen alguna relación con los enunciados del inciso *d*? ______________________

h) Tomando como parámetro la calificación media, ¿qué equipo tuvo un mejor desempeño? ______________________

Comparen sus tablas y respuestas con las de sus compañeros. Discutan y lleguen a un acuerdo sobre lo que representa el promedio de las distancias de las calificaciones a la calificación media. Después analicen la información que se presenta en la siguiente página.

Glosario

distancia entre dos puntos sobre una recta.

Convivo en armonía

Desviación media

La desviación media de un conjunto de datos es el promedio de las distancias de cada dato a la media de los datos. Esta medida indica qué tan dispersos están los datos de un conjunto. Usualmente se denota como DM. Recuerda que la distancia entre dos valores a y b es el valor absoluto de su diferencia: $|a - b| = |b - a|$.

Por ejemplo, si tenemos el conjunto de datos 7, 7.5, 7.9, 8.9, 9.

Su media es $\frac{7 + 7.5 + 7.9 + 8.9 + 9}{5} = \frac{40.3}{5} = \quad$

Y la desviación media es:

$$\text{DM} = \frac{|\quad - 7| + |\quad - 7.5| + |\quad - 7.9| + |\quad - 8.9| + |\quad - 9|}{5}$$

$$= \frac{1.06 + 0.56 + 0.16 + 0.84 + 0.94}{5} = \frac{3.56}{5} = 0.712$$

En el conjunto 7, 8, 8.1, 8.2, 9, la media es la misma que la del conjunto anterior:

$$\frac{7 + 8 + 8.1 + 8.2 + 9}{5} = \frac{40.3}{5} = \quad$$

Pero la desviación media, resulta distinta:

$$\text{DM} = \frac{|\quad - 7| + |\quad - 8| + |\quad - 8.1| + |\quad - 8.2| + |\quad - 9|}{5}$$

$$= \frac{1.06 + 0.06 + 0.04 + 0.14 + 0.94}{5} = \frac{2.24}{5} = 0.448$$

Como 0.712 es mayor que 0.448, se concluye que en el primer conjunto los datos están más dispersos que en el segundo.

¿Vamos bien?

Realiza lo que se indica. Al terminar, compara tus procedimientos y tus resultados con los de tus compañeros.

I. Calcula la desviación media de los datos 27, 32, 38, 40 y 43. ____________

II. La edad media de dos hermanos es de 17.5 años y la desviación media de las edades es de 1.5.

a) ¿Cuántos años tiene cada hermano? ____________

b) Explica cómo determinaste tu respuesta en el inciso anterior. ____________

____

www.esant.mx/essema2-015

4. En equipos, lean el texto y hagan lo que se indica.

Para esta actividad necesitan conseguir (con su profesor de Física) un tornillo micrométrico o palmer y un vernier o nonio (ambos instrumentos sirven para medir longitudes muy pequeñas; investiguen cómo funcionan).

a) Midan el espesor de una moneda de $5 con el vernier, con el palmer y con una regla. Anoten las medidas en su cuaderno. Pasen la moneda y los instrumentos a otro equipo para que realicen las mediciones del espesor de la misma moneda.
b) En el pizarrón hagan una tabla como la siguiente para registrar las medidas del grosor de la moneda que obtuvieron en todos los equipos. Calculen la media, la mediana y el rango para cada instrumento y escríbanlo en las últimas columnas.

Espesor de una moneda de $5 (mm)					
Equipo 1	Equipo 2	...	Media	Mediana	Rango

c) ¿Alguna de las tres medidas (media, mediana, rango) se aproxima a 1.95 mm? ______ ¿La de qué instrumento se aproxima más? ______
d) Para cada instrumento, calculen la distancia de cada medida registrada a la media correspondiente. Comparen las distancias y respondan con cuál de los instrumentos son menores tales distancias. ______
e) ¿Cuándo consideran que es más precisa una medida: cuando su distancia a la media es mayor o menor? ______
f) Calculen la desviación media de las medidas para cada instrumento y escriban el resultado.

Regla: DM = ______ Palmer: DM = ______ Vernier: DM = ______
g) ¿En qué caso resulta menor la desviación media? ______

¿Coincide con su respuesta del inciso *d*? ______
h) Si el espesor real de la moneda se encuentra entre 1.85 mm y 2.05 mm, ¿cuál instrumento consideran que es más preciso? ______

¿Coincide su respuesta con la del inciso *g*? ______

Los compañeros de Manuel midieron el espesor de una moneda de $10 y obtuvieron los resultados que se muestran en la tabla. Complétenla.

Espesor de una moneda de $10 (mm)				
Equipo 1	Equipo 2	Equipo 3	Equipo 4	Media
2	2	2.5	2.5	
2.1	2.2	2.3	2.4	
2.1	2.25	2.3	2.35	

i) Calculen la desviación media con cada instrumento.

Regla: DM = ________ Palmer: DM = ________ Vernier: DM = ________

j) ¿Cuál instrumento consideran que es más preciso? ________________

Comparen sus cálculos y respuestas con los demás equipos. Si hay diferencias, discútanlas. Analicen el siguiente texto y considérenlo en su discusión.

Al medir un mismo objeto con diferentes instrumentos se cometen errores de medición. En ciertas circunstancias, puede tomarse como mejor aproximación a la medida real del objeto, la media de las distintas medidas. La precisión del método o instrumento utilizado se relaciona con la desviación media de las medidas obtenidas. Cuando el conjunto de datos es pequeño, a menor desviación media mayor precisión del método o instrumento de medición.

¿Qué aprendí?

Analiza los problemas y haz lo que se indica. Al terminar, revisa tus procedimientos y tus resultados, primero con ayuda de tus compañeros y luego con tu profesor.

1. En un estudio se analizaron los salarios de cinco puestos de distintas empresas. La tabla muestra los salarios registrados por dos empresas.

	Puestos				
Salario en empresa 1 ($)	150	250	275	300	700
Salario en empresa 2 ($)	150	280	300	320	1000

a) ¿En cuál empresa es mayor la diferencia entre los salarios y la media?

b) Responde la misma pregunta, pero sin considerar los puestos de limpieza ni de gerencia.

2. En una feria, René observa cómo se desarrolla un mismo juego en dos mesas distintas. Registra los puntos ganados (+) y los puntos perdidos (−) de diez personas que han jugado en cada mesa; estos se muestran en la tabla.

Puntuación de cada jugador									
−8	30	40	−25	34	50	−10	50	−15	15
100	−70	40	−30	150	−10	−100	46	−20	40

a) ¿En cuál de las dos mesas es más arriesgado jugar? ________________

____

Marca con una ✓ la casilla que describe tu desempeño.

Uso e interpreto las medidas de tendencia central (moda, media aritmética y mediana), el rango y la desviación media de un conjunto de datos y decido cuál de ellas conviene más en el análisis de los datos en cuestión.

Nivel de logro		
	A	Requiero ayuda para realizarlo.
	B	Lo hago, pero en ocasiones necesito ayuda.
	C	Lo hago de manera autónoma.

Simulación de un experimento aleatorio

Abre una hoja de cálculo. Es recomendable que, antes de empezar a trabajar, explores el programa para que te familiarices con él.

Sigue las instrucciones para simular el siguiente experimento aleatorio.

De una urna donde hay dos bolas rojas, tres verdes y cuatro azules, se extrae al azar una bola, se registra su color y se regresa a la urna. El experimento se repite varias veces. Calcularás y compararás la frecuencia relativa o probabilidad frecuencial con la probabilidad teórica de cada evento: "sale rojo", "sale verde" o "sale azul".

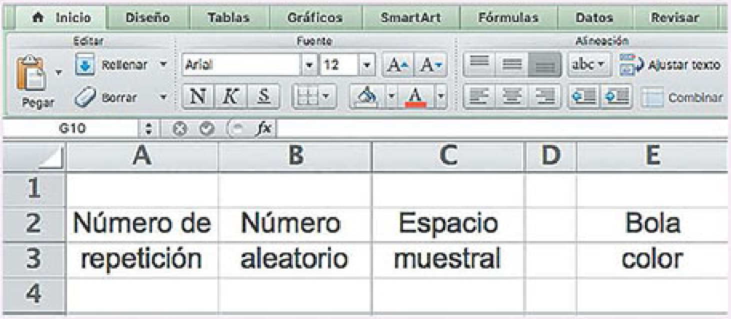


Imagen 1

a) Usa las primeras tres filas para escribir el encabezado de las primeras tres columnas: columna A: "Número de repetición", columna B: "Número aleatorio", columna C: "Espacio muestral", y en la columna E: "Bola color" (imagen 1). Reserva la columna D para numerar las bolas.

Puedes modificar el ancho de las filas: coloca el cursor entre dos columnas hasta que aparezca el icono ↔ y presiona dos veces seguidas el botón izquierdo del ratón, o presiona el botón izquierdo y arrastra hacia la derecha o la izquierda.

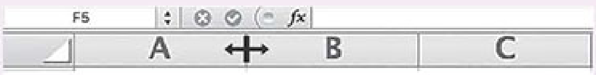


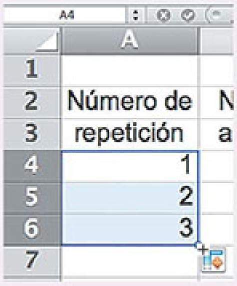
Imagen 2

b) En la columna C, a partir de la fila 4, escribe todos los resultados posibles: Rojo, Rojo, Verde, Verde, Verde, Azul, Azul, Azul, Azul; y en la columna D, numera las bolas del 1 al 9.

	A	B	C	D
1				
2	Número de	Número	Espacio	
3	repetición	aleatorio	muestral	
4			Rojo	1
5			Rojo	2
6			Verde	3
7			Verde	4
8			Verde	5
9			Azul	6
10			Azul	7
11			Azul	8
12			Azul	9

Imagen 3

c) Suponiendo que el experimento se repite 100 veces, numera cada repetición. Escribe "1" en la celda A4, "2" en la celda A5 y "3" en la celda A6. Coloca el cursor en la celda A4, presiona el botón izquierdo del ratón y arrástralo seleccionando las tres celdas (imagen 4, siguiente página). Desplaza el ratón hacia la parte inferior derecha en busca del símbolo "+"; una vez que aparezca, presiónalo con el botón izquierdo del ratón y, sin soltarlo, arrástralo hacia abajo; en la parte inferior derecha irá apareciendo el número de celdas seleccionadas (imagen 5). Continúa arrastrando el ratón hasta que aparezca el número "100". Esto ocurrirá cuando llegues a la celda A103 (imagen 6).

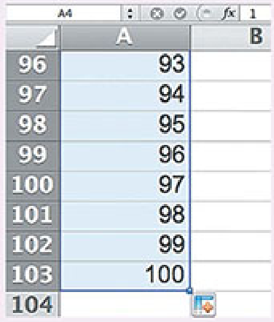


	A	
1		
2	Número de	N
3	repetición	a
4	1	
5	2	
6	3	
7		

Imagen 4

	A	
1		
2	Número de	N
3	repetición	a
4	1	
5	2	
6	3	
7		
8		5

Imagen 5



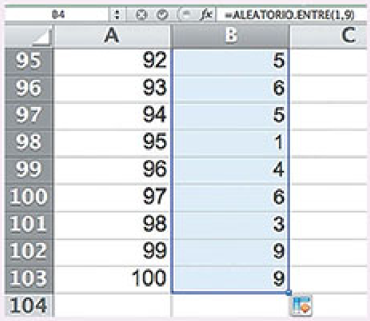
	A	B
96	93	
97	94	
98	95	
99	96	
100	97	
101	98	
102	99	
103	100	
104		

Imagen 6

d) Indica al programa que en cada repetición elija una bola, es decir, que escoja un número entre 1 y 9. Para eso, en la celda B4 escribe: "=ALEATORIO.ENTRE(1,9)" (imagen 7) y presiona la tecla Enter (en algunas versiones, en lugar de "," hay que escribir ";" en las intrucciones). En la parte inferior derecha de la celda, busca el símbolo "+", da doble clic con el botón izquierdo (o, según la versión, presiona con el botón izquierdo del ratón y arrástralo hasta la celda B103 correspondiente a la repetición número 100). Cada número que aparece en la columna B indica el número de la bola que salió en la repetición que tiene el número de la columna A. En una misma fila, si en la celda B95 aparece 5 y en la celda A95 aparece 92 (imagen 8), significa que en la repetición número 92 salió la bola 5 (verde 5). Cada vez que escribas algo, los números aleatorios van a cambiar. No importa, ignóralo.

	A	B	C	D	E
1					
2	Número de	Número	Espacio		Bola
3	repetición	aleatorio	muestral		color
4	1	=ALEATORIO.ENTRE(1,9)			
5					

Imagen 7



	A	B	C
95	92	5	
96	93	6	
97	94	5	
98	95	1	
99	96	4	
100	97	6	
101	98	3	
102	99	9	
103	100	9	
104			

Imagen 8

e) En la columna E, debajo de "Bola color", escribe los colores "Rojo", "Verde" y "Azul". Escribe los encabezados de las columnas F y G: en F, "Frecuencia absoluta" y en G, "Frecuencia relativa".

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2	Número de	Número	Espacio		Bola	Frecuencia	Frecuencia
3	repetición	aleatorio	muestral		color	absoluta	relativa
4	1	1	Rojo	1	Rojo		
5	2	2	Rojo	2	Verde		
6	3	1	Verde	3	Azul		

Imagen 9

f) Coloca el cursor en la celda F4 y escribe: "=CONTAR.SI(B4:B103,"<=2")". Esto indica al programa que cuente el número de veces que salió 1 o 2 (bola roja).

A	B	C	D	E	F
ero de ·tición	Número aleatorio	Espacio muestral		Bola color	Frecuencia absoluta
1	8	Rojo	1	Rojo	=CONTAR.SI(B4:B103,"<=2")

Imagen 10

En la celda F5, escribe:
"=CONTAR.SI(B4:B103,3)+CONTAR.SI(B4:B103,4)+CONTAR.SI(B4:B103,5)".
Esto indica al programa que cuente el número de veces que sale 3, 4 o 5 (verde).

fx =CONTAR.SI(B4:B103,3)+CONTAR.SI(B4:B103,4)+CONTAR.SI(B4:B103,5)

Imagen 11

Y en la celda F6, escribe: "=CONTAR.SI(B4:B103,">=6")", lo que indica al programa que cuente el número de veces que salió 6, 7, 8 y 9 (bola azul).

Imagen 12 fx =CONTAR.SI(B4:B103,">=6")

g) Suma las frecuencias absolutas: en la celda E7 escribe "Total", y en la F7 escribe: "=SUMA(F4:F6)". Si lo has hecho bien, la suma de las frecuencias debe ser igual al número de repeticiones: 100. Si no es igual, revisa que hayas escrito bien las fórmulas del inciso anterior.

F7 fx =SUMA(F4:F6)

	A	B	C	D	E	F
1						
2	Número de	Número	Espacio		Bola	Frecuencia
3	repetición	aleatorio	muestral		color	absoluta
4	1	5	Rojo	1	Rojo	17
5	2	5	Rojo	2	Verde	38
6	3	6	Verde	3	Azul	45
7	4	1	Verde	4	Total	100

Imagen 13

h) Calcula la frecuencia relativa (o probabilidad frecuencial) de cada evento: escribe en la celda G4 "=F4/F7", en la G5: "=F5/F7" y en la G6: "=F6/F7". Después suma las frecuencias relativas: escribe "=SUMA(G4:G6)". Si todo va bien, esta suma debe ser igual a 1.

SUMA fx =F4/F7

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2	Número de	Número	Espacio		Bola	Frecuencia	Frecuencia
3	repetición	aleatorio	muestral		color	absoluta	relativa
4	1	6	Rojo	1	Rojo	18	=F4/F7
5	2	1	Rojo	2	Verde	32	0.32
6	3	7	Verde	3	Azul	50	0.5
7	4	6	Verde	4	Total	100	1

Imagen 14

i) En la celda H2 escribe "Resultados" y abajo "favorables". En las celdas H4, H5 y H6 escribe "=CONTAR.SI(C4:C12,"Rojo")", "=CONTAR.SI(C4:C12,"Verde")" y "=CONTAR.SI(C4:C12,"Azul"), respectivamente. En la celda H7, suma todos los resultados posibles. Escribe "=SUMA(H4:H6)" (imagen 15, siguiente página).

=CONTAR.SI(C4:C12,"Rojo")

B	C	D	E	F	G	
mero atorio	Espacio muestral		Bola color	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	Resultados favorables
2	Rojo	1	Rojo	16	0.16	2
2	Rojo	2	Verde	38	0.38	3
9	Verde	3	Azul	46	0.46	4
4	Verde	4	Total	100	1	9

Imagen 15

j) Calcula la probabilidad (teórica) de cada evento. En la celda I3 escribe "Probabilidad". En las celdas I4, I5 e I6, escribe "=H4/H7", "=H5/H7" y "=H6/H7", respectivamente. En la celda H7 escribe "=SUMA(I4:I6)".

fx =H4/H7

	A	B	C	D	E	F	G	H	
1									
2	Número de	Número	Espacio		Bola	Frecuencia	Frecuencia	Resultados	
3	repetición	aleatorio	muestral		color	absoluta	relativa	favorables	Probabilidad
4	1	9	Rojo	1	Rojo	27	0.27	2	0.2222222
5	2	2	Rojo	2	Verde	33	0.33	3	0.3333333
6	3	1	Verde	3	Azul	40	0.4	4	0.4444444
7	4	8	Verde	4	Total	100	1	9	1

Imagen 16

k) En la celda F9 escribe "Diferencia Frecuencia relativa – Probabilidad". En las celdas F10, F11 y F12, escribe "Rojo", "Verde", "Azul", respectivamente. Y en las celdas G10, G11 y G12, escribe "=ABS(G4-I4)", "=ABS(G5-I5)" y "=ABS(G6-I6)", respectivamente.
Registra las diferencias en una hoja.

Diferencia Frecuencia relativa – Probabilidad	
Rojo	=ABS(G4-I4)
Verde	0.0233333
Azul	0.0055556

Imagen 17

l) Amplía el número de repeticiones a 500. Para eso coloca el cursor en la celda A101 y selecciona las siguientes dos celdas: A102 y A103. En la esquina inferior derecha, busca el icono "+", presiona con el botón izquierdo y arrastra el ratón hacia abajo, hasta que llegues a 500. Después da doble clic en el signo + de la esquina inferior derecha de la celda B103 (o, según la versión, repite lo mismo en la columna B) para ampliar el registro de los números aleatorios hasta la celda B503. En la columna F, verifica que las frecuencias absolutas sumen 500. Si no suman 500, coloca el cursor sobre cada una de las frecuencias y asegúrate de que queden así: F4: "=CONTAR.SI(B4:B503,"<=2")", F5: "=CONTAR.SI(B4:B503,3)+CONTAR.SI(B4:B503,4)+CONTAR.SI(B4:B503,5)" y F6: "=CONTAR.SI(B4:B503,">=6")".

m) Compara la frecuencia relativa y la probabilidad de cada evento. ¿Qué observas?

____

____

____

n) Simula el experimento con una urna donde hay dos bolas rojas, dos blancas, tres verdes y cuatro azules. Ve aumentando poco a poco las repeticiones y compara la frecuencia relativa con la probabilidad. Anota lo que observas en tu cuaderno.

Giro ascendente

Elige la opción correcta. Con base en tus resultados, identifica los contenidos que necesitas repasar para mejorar tu desempeño.

1. ¿Cuál es la medida en milímetros de una llave de tuercas de $\frac{3}{8}$ de pulgada?

   A) 0.677 mm B) 6.77 mm C) 0.9525 mm D) 9.525 mm

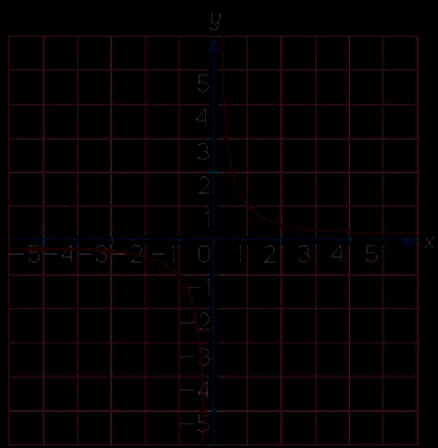
2. ¿En cuáles casos la variación de magnitudes es inversamente proporcional?

   I. La cantidad x de litros de gasolina que consume un vehículo y la distancia y recorrida por este.
   II. La presión p de un gas a temperatura constante y el volumen v del recipiente que lo contiene.
   III. El área A de un cuadrado y la longitud x de su lado.
   IV. La distancia d recorrida por un vehículo que viaja con rapidez constante y el tiempo t que tarda en hacer el recorrido.

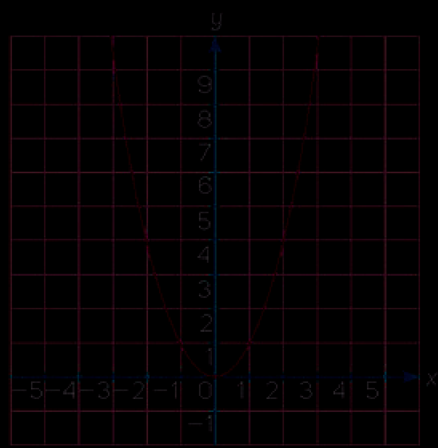
   A) I y II B) I y III C) II y IV D) I, II y IV

3. ¿Cuál de las siguientes gráficas no corresponde ni a una relación de proporcionalidad inversa ni a una de proporcionalidad directa ni a una de variación lineal?

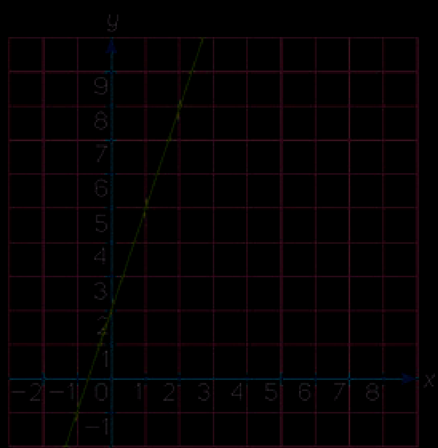
A)



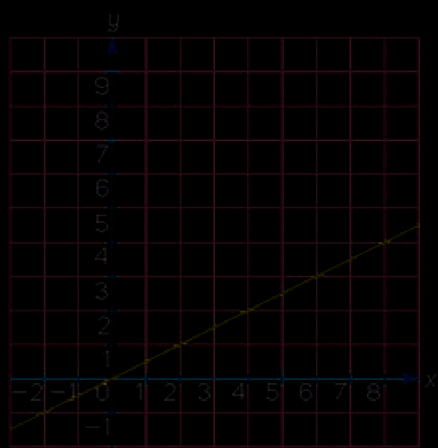
B)



C)



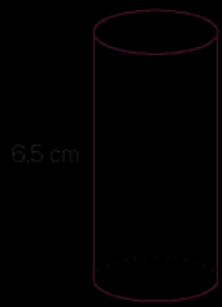
D)



4. Un prisma heptagonal con altura de 10 cm y apotema de 2.64 cm tiene un volumen de 234.696 cm^3. ¿Cuánto mide cada lado del heptágono regular?

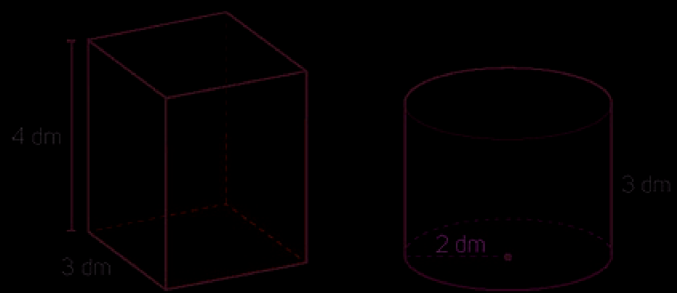
A) 17.8 cm B) 2.54 cm C) 1.78 cm D) 5.08 cm

5. El cilindro de la imagen tiene un volumen de 45.9225 cm^3. ¿Cuánto mide el diámetro de la base? Usa 3.14 como aproximación al valor de π.



A) 2.25 cm B) 1.5 cm C) 3 cm D) 4.5 cm

6. El recipiente con forma de prisma cuadrangular tiene agua hasta las tres cuartas partes de su capacidad. Si se vierte el agua en el recipiente cilíndrico, ¿cuántos litros de agua más podrán caber en el cilindro?



A) 1.68 L B) 10.68 L C) 16.8 L D) 106.8 L

7. ¿Cuál es la probabilidad de extraer una pelota roja de una urna que contiene ocho pelotas rojas, siete blancas y cinco azules?

A) $\frac{1}{8}$ B) $\frac{8}{12}$ C) $\frac{1}{20}$ D) $\frac{8}{20}$

8. ¿Cuáles conjuntos de datos tienen la misma dispersión?

A = {1.5, 2.3, 2.1, 1.8, 1.9}

B = {15, 23, 21, 18, 19}

C = {16, 17, 19, 23, 21}

D = {21, 25, 21, 22, 26}

A) Los conjuntos A y B
B) Los conjuntos A y C
C) Los conjuntos B y C
D) Los conjuntos B y D

Resuelve los problemas. Con base en tus resultados, identifica los contenidos que necesitas repasar para mejorar tu desempeño.

1. Gilberto necesita 45 litros de pintura. Compró dos cubetas de 19 litros cada una y un galón. ¿Compró lo suficiente? __________ ¿Por qué? ______________________________

____

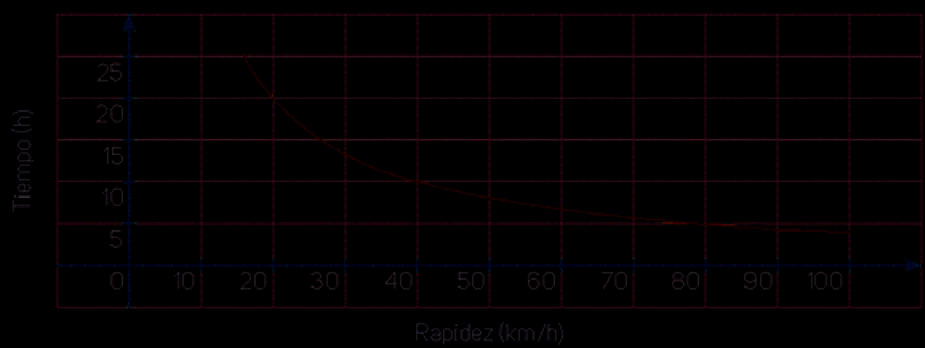
____

2. Un transportista debe realizar un trayecto de 400 km. Con base en la gráfica determina con qué rapidez necesita viajar si desea hacer el recorrido en seis horas.

____

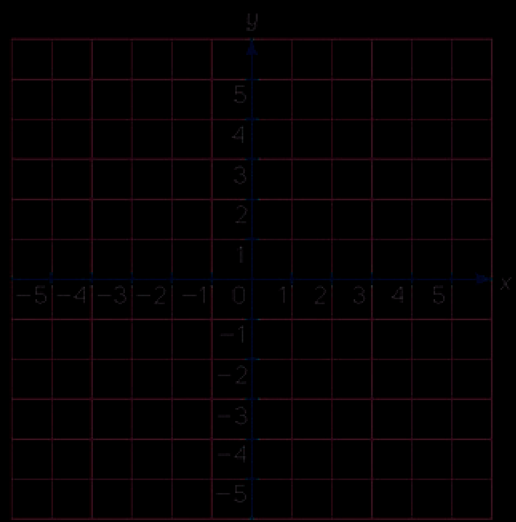
____

Tiempo del recorrido en relación con la rapidez a la que se viaja

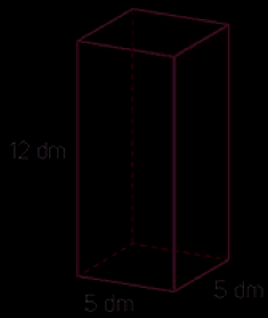


3. Considera que las magnitudes x y y varían según la relación $y = \frac{-2}{x}$. Escribe los datos faltantes en la tabla y traza la gráfica correspondiente.

x	-4	-2	-1	1	2	4
y						



4. Los dos depósitos de la ilustración se llenarán con una llave que vierte 60 litros de agua por minuto. ¿Cuánto tiempo tardará en llenarse cada uno si se dejan 20 cm de altura sin agua?



Prisma: ____________ Cilindro: ____________

Escribe las operaciones que realizaste.

5. Se lanzan al aire dos monedas.

a) ¿Cuál es el espacio muestral? Denota por A el hecho de que caiga águila y por S el hecho de que caiga sol.

____

b) Calcula la probabilidad de los eventos.

A: Cayeron dos águilas. ____________

B: Cayeron un águila y un sol. ____________

C: Cayeron dos soles. ____________

6. En la tabla se registran los ingresos mensuales (en pesos) de tres grupos de trabajadores.

Ingresos mensuales ($)				
3525	3200	3450	2900	6450
2450	2800	3600	7950	4800
2750	6575	6050	4560	7700

¿En cuál de los tres grupos son más homogéneos los ingresos? ____________

Explica tu respuesta. ______________________________

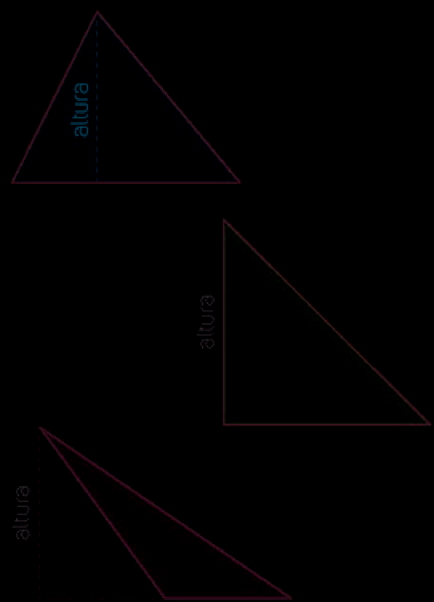
____

Glosario

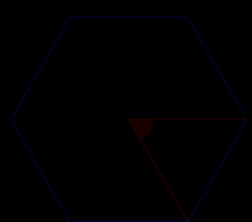
abscisa. Primera coordenada, x, de un punto (x, y) en el plano.

agrupación de términos semejantes. Procedimiento para simplificar expresiones algebraicas en las que aparecen sumandos con la misma literal.

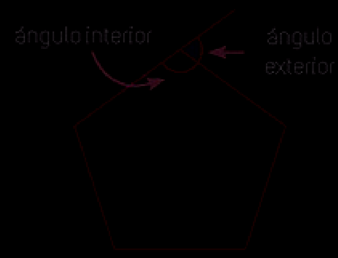
altura de un triángulo. Es el segmento de recta perpendicular a cualquiera de los lados del triángulo que pasa por el vértice opuesto a dicho lado. También se llama *altura del triángulo* a la longitud de este segmento.



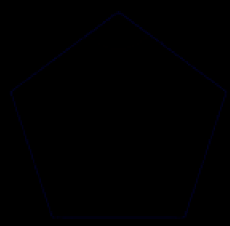
ángulo central de un polígono. Ángulo cuyo vértice se encuentra en el centro del polígono y cuyos lados son segmentos que unen un par de vértices consecutivos del polígono.



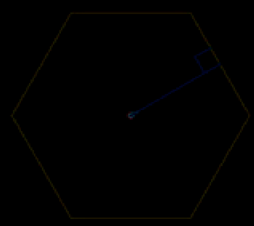
ángulo exterior de un polígono. Ángulo que forma la prolongación de un lado del polígono con el lado adyacente. El ángulo interior y el ángulo exterior son suplementarios, es decir, suman 180°.



ángulo interior de un polígono. Ángulo entre dos lados adyacentes del polígono.



apotema. Al segmento perpendicular que une el centro de un polígono regular con un lado, se le llama *apotema del polígono*.



arista. Segmento de recta que limita las caras de un cuerpo geométrico.

capacidad. Cantidad máxima de líquido, sólido o gas que puede contener un recipiente. Generalmente los líquidos se miden en litros (L).

coeficiente. El número que multiplica a una literal en una expresión algebraica se llama *coeficiente de la literal*. Por ejemplo, en la expresión $-4x$, el coeficiente de x es -4.

constante de proporcionalidad inversa. Si dos magnitudes son inversamente proporcionales, y a un valor x de la primera magnitud le corresponde un valor y de la segunda magnitud, entonces el producto xy es una constante que se conoce como *constante de proporcionalidad inversa*. Esto se puede escribir así: $xy = k$, o bien, $y = k/x$.

coordenadas de un punto en el plano. Pareja ordenada de números (x, y) que indica la ubicación del punto en el plano. La primera coordenada, x, es la distancia horizontal del punto al origen, (0, 0), y la segunda coordenada, y, es la distancia vertical del punto al origen.

decámetro. Unidad de longitud que equivale a 10 metros. Su símbolo es dam.

desarrollo plano de un prisma. Esquema que permite construir un prisma cortando por los bordes y doblando las aristas internas.

desviación media. La desviación media de un conjunto de datos es el promedio de las distancias de cada dato a la media de los datos. Esta medida indica qué tan dispersos están los datos de un conjunto.

diagonal. Segmento de recta que une cualquier par de vértices no consecutivos de un polígono.

diagrama de árbol. Esquema que muestra los resultados posibles de un experimento que tiene varias etapas. Se forma con segmentos (ramas) que terminan en los resultados de cada etapa.

diámetro. Línea recta que une dos puntos de una circunferencia pasando por su centro.

distancia entre dos puntos sobre una recta. Es el valor absoluto de su diferencia. Por ejemplo, la distancia de 3 a 9 es:

$$|3 - 9| = |-6| = 6$$

Se puede calcular restando al mayor de los números el menor: $9 - 3 = 6$.

ecuación. Igualdad entre dos expresiones en la que al menos en una de ellas hay una cantidad desconocida.

espacio muestral. Conjunto de todos los resultados posibles en un experimento aleatorio.

evento. Colección de resultados posibles de un experimento aleatorio.

experimento aleatorio. Experimento que tiene distintos resultados posibles y en el cual no es posible determinar qué resultado se obtendrá antes de realizarlo.

expresiones algebraicas equivalentes. Dos o más expresiones algebraicas son equivalentes si representan la misma cantidad.

fracción mixta. Número que combina un entero con una fracción; representa la suma de ambos. Por ejemplo $4\frac{2}{3}$.

$$4\frac{2}{3} = 4 + \frac{2}{3} = \frac{14}{3}$$

frecuencia absoluta. Es el número de veces que aparece un valor en un conjunto de datos.

gráficas de línea. En estadística se llama *gráficas de línea* a las gráficas formadas por segmentos de recta; se usan para comparar valores de las variables respecto a algún criterio (por lo general el tiempo) y mostrar tendencias.

hectómetro. Unidad de longitud que equivale a 100 metros. Su símbolo es hm.

histograma. Gráfica que muestra datos agrupados en intervalos. Se construye formando rectángulos que tienen como base la longitud del intervalo y como altura la frecuencia correspondiente al intervalo.

intervalos de números. Todos los números que van desde un valor inicial a hasta un valor final b.

$[a, b]$ incluye a los números a y b;
$[a, b)$ incluye a a y no incluye a b;
$(a, b]$ no incluye a a y sí incluye a b;
(a, b) no incluye a a ni a b.

jerarquía de las operaciones. Orden en que se realizan las operaciones: primero las multiplicaciones y divisiones, después las sumas y restas. Cuando aparecen paréntesis, primero se realizan las operaciones al interior de este. Si hay paréntesis y corchetes anidados {[(( ))]}, las operaciones se realizan de adentro hacia afuera.

Ejemplo:

$$\frac{1}{2} \times \left[\left(\frac{2}{7} \div \frac{2}{9}\right) - \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{7}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{2} \times \left[\frac{18}{14} - \frac{15}{14}\right]$$
$$= \frac{1}{2} \times \left[\frac{3}{14}\right] = \frac{3}{24}$$

leyes de los signos para la multiplicación y la división. El producto o cociente de dos números del mismo signo es positivo y el producto o cociente de dos números de distinto signo es negativo. Si a y b son dos números, entonces:

$$(+a)(+b) = +(ab),$$
$$(-a)(-b) = +(ab),$$
$$(+a)/(+b) = +(a/b),$$
$$(-a)/(-b) = +(a/b)$$
$$(+a)(-b) = -(ab),$$
$$(-a)(+b) = -(ab),$$
$$(+a)/(-b) = -(a/b),$$
$$(-a)/(+b) = -(a/b)$$

litro. Cantidad de líquido contenido en un cubo de un decímetro (dm) de arista: 1 L equivale a 1 dm^3.

magnitudes directamente proporcionales. Si el cociente entre los valores correspondientes de dos magnitudes es constante, se dice que las magnitudes varían proporcionalmente. Al valor del cociente se le llama *constante de proporcionalidad*.

magnitudes inversamente proporcionales. Dos magnitudes son inversamente proporcionales si al multiplicar una de ellas por un número, la otra se divide entre el mismo número, y viceversa, si al dividir una de ellas entre un número, la otra queda multiplicada por el mismo número.

marca de clase de un intervalo. La marca de clase de un intervalo es el punto medio del intervalo.

masa. Cantidad de materia que posee un cuerpo. Su unidad de medida es el kilogramo.

mediana de una colección de datos. Dato que queda en el centro cuando estos se escriben en forma ordenada. Si no hay un valor central porque la cantidad de datos es par, la mediana se obtiene promediando los dos datos centrales.

moda de una colección de datos. Es el valor que más se repite, es decir, el dato más frecuente de la colección.

notación científica. Para escribir números muy grandes o muy pequeños en forma abreviada, se usa la notación científica. Un número escrito en notación científica es de la forma $a \times 10^k$, donde k es un entero y a es un número decimal mayor o igual que 1 y menor que 10.

número cuadrado perfecto. Los números enteros que resultan de elevar un número entero al cuadrado se llaman *cuadrados perfectos*.

Por ejemplo, 25 es un cuadrado perfecto pues $25 = 5 \times 5$.

números enteros. Colección de números formada por los números naturales, sus simétricos y el cero:

$$\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \ldots$$

ordenada. Segunda coordenada, y, de un punto (x, y) en el plano.

ordenada al origen. Ordenada del punto donde la recta interseca al eje; es decir, es la segunda coordenada del punto $(0, b)$.

paralelogramo. Cuadrilátero en el que los lados opuestos son paralelos.

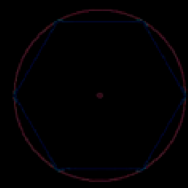
parásito. Ser vivo que, durante toda su vida o durante una etapa, se aloja en otro ser vivo, por lo general de distinta especie, y se alimenta de él.

pendiente de una recta. Para cualquier par de puntos sobre una línea recta, el cociente de la diferencia de las ordenadas entre la diferencia de las abscisas es siempre igual. A esta razón constante se le llama *pendiente de la recta*. Si la recta es creciente, la pendiente es positiva y si la recta es decreciente, la pendiente es negativa.

polígono convexo. Un polígono es convexo si todos sus ángulos interiores miden menos de 180°.

polígono de frecuencias. Gráfica de línea asociada con un histograma. Para trazar el polígono de frecuencias, se localiza la marca de clase de cada intervalo en el eje horizontal y sobre esta se traza un punto a una altura igual a la frecuencia correspondiente; por último, se unen esos puntos por segmentos. Al inicio y al final, los segmentos se alargan hasta cortar el eje horizontal.

polígono inscrito en una circunferencia. Un polígono está inscrito en una circunferencia si sus vértices están sobre la circunferencia.



polígono no convexo. Un polígono es no convexo si al menos uno de sus ángulos interiores mide más de 180°.

polígonos que cubren el plano. Cuando se puede armar un mosaico con copias de un polígono, sin dejar huecos ni encimar las piezas, decimos que el polígono cubre el plano. Si al dividir 360° entre la medida del ángulo interior de un polígono regular el resultado es un número entero, el polígono regular cubre el plano.

polígono regular. Polígono con todos sus lados y todos sus ángulos de la misma medida.

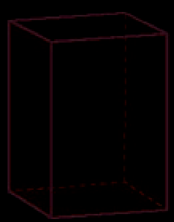
potencia *n* de un número *a*. Es la multiplicación repetida del número a, tantas veces como indique el número n. Se denota como a^n. Al número a se le llama *base* y al número n se le llama *exponente*.

prisma decagonal. Cuerpo geométrico limitado por dos polígonos de diez lados paralelos e iguales (llamados *bases*) y por diez caras rectangulares.

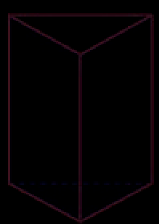
prisma dodecagonal. Cuerpo geométrico limitado por dos polígonos de doce lados paralelos e iguales (llamados *bases*) y por doce caras rectangulares.

prisma poligonal. Cuerpo geométrico limitado por dos polígonos paralelos, llamados *bases*, y por tantas caras rectangulares como lados tenga el polígono. Los prismas poligonales se nombran en función de los polígonos que los definen, es decir, de los polígonos que conforman sus bases.

prisma rectangular. Cuerpo geométrico limitado por dos rectángulos paralelos e iguales (llamados *bases*) y por cuatro caras rectangulares.



prisma triangular. Cuerpo geométrico limitado por dos triángulos paralelos e iguales (llamados *bases*) y por tres caras rectangulares.



probabilidad clásica o teórica de un evento. Cociente del número de casos favorables al evento entre el número total de resultados posibles.

probabilidad frecuencial. Es una aproximación a la probabilidad de un evento. Se obtiene calculando el cociente del número de veces que ocurre un evento entre el número de veces que se repite el experimento.

promedio o media aritmética. Cociente de la suma de los datos de una colección entre la cantidad de datos.

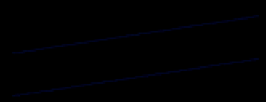
raíz cuadrada de un número. El número b es la raíz cuadrada del número $a > 0$ si $b^2 = a$ y se denota $\sqrt{a} = b$.

rango de una colección de datos. Es la diferencia del máximo menos el mínimo de los datos.

recíproco o inverso multiplicativo de un número x. Es el número y tal que al multiplicarlo por x da como resultado 1: $xy = 1$.

Si el número es una fracción, $\frac{a}{b}$, su inverso multiplicativo es $\frac{b}{a}$.

rectas paralelas. Dos rectas son paralelas si, por más que se les prolongue, nunca se cortan.
Si dos o más rectas son paralelas, su pendiente es igual.



rectas que se intersecan. Rectas que se cortan o se cruzan en un punto. Al punto donde se cortan se le llama *punto de intersección*.

relación de proporcionalidad inversa. Relación entre dos magnitudes en la que el producto de estas es constante.

simétrico de un número. El simétrico de un número a, es $-a$; es decir, dos números son simétricos si tienen el mismo valor absoluto. Por ejemplo, 3 y -3 son simétricos pues:

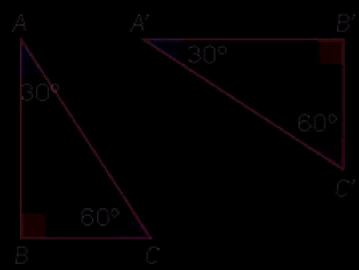
$$|3| = 3 = |-3|$$

sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Pareja de ecuaciones de la forma

$$\begin{aligned} ax + by &= c \\ dx + ey &= f \end{aligned}$$

donde a, b, c, d, e y f son constantes, mientras que x y y son incógnitas. La pareja de números x y y es solución del sistema de ecuaciones si dicha pareja es solución de cada una de las ecuaciones del sistema.

triángulos congruentes. Dos triángulos son congruentes si sus lados correspondientes y sus ángulos correspondientes miden lo mismo.



valor absoluto de un número. Distancia del número x al cero en el eje numérico. Se denota por $|x|$.

variación lineal. Dos magnitudes, x y y, varían en forma lineal si cada vez que x varía en una cantidad fija, el cambio en y siempre es el mismo. El conjunto de puntos (x, y) que representa esta variación está sobre una recta.

volumen de un prisma. El volumen de un prisma es igual al producto del área de la base por la altura del prisma.

volumen de un prisma triangular. El volumen de un prisma triangular es igual al producto del área del triángulo base por la altura del prisma.

Fuentes de información

Impresas

- Bosh, C. *El billar no es de vagos: ciencia, juego y diversión*, Fondo de Cultura Económica, México, 2009.
- Capó, M. *El país de las mates. 100 problemas de ingenio 4*, Rompecabezas, Madrid, 2006.
- Cerasoli, A. *La sorpresa de los números*, Ediciones Maeva, Madrid, 2006 (colección Biblioteca de Aula, serie Astrolabio).
- Elwes, R. *Cómo contar hasta el infinito y otros 34 usos prácticos de las matemáticas*, Ariel, Barcelona, 2011.
- Enzensberger, H. M. *El diablo de los números. Un libro para todos aquellos que temen a las matemáticas*, Siruela, Madrid, 1997.
- Jiménez, D. *Matemáticos que cambiaron al mundo: vidas de genios del número y la forma que fueron famosos y dejaron huella en la historia*, Tajamar Editores, Santiago de Chile, 2010.
- Marván, L. M. *Representaciones numéricas*, SEP-Santillana, México, 2000 (Libros del Rincón).
- Marván L. M. y A. P. *Huesca. Explorando en matemáticas 1*, Nuevo México, México, 2000.
- Paenza, A. *Matemática… ¿Estás ahí? Sobre números, personajes, problemas y curiosidades*, Siglo XXI, Buenos Aires, 2005 (colección Ciencia que Ladra).
- Perelman, Y. *Matemáticas Recreativas*, SEP-Planeta, México, 2003 (Libros del Rincón).
- Ruiz Ruiz-Funes, C. y S. Regules. *El piropo matemático. De los números a las estrellas*, Lectorum, Barcelona, 2000.
- Tahan, M. *El hombre que calculaba*, Noriega, México, 1998.
- — *Matemática, divertida y curiosa*, Océano, México, 2013.

Electrónicas

- [illegible] (consulta: 21 de mayo de 2018, 17:10h) En esta dirección electrónica encontrarás videos, documentos y actividades de la SEP sobre temas relacionados con el programa de segundo de secundaria, incluyendo ejemplos y situaciones de la vida cotidiana.

- [illegible] (consulta: 21 de mayo de 2018, 17: 21 h) Encontrarás en esta página multitud de actividades interactivas para reforzar tus conocimientos de matemáticas, por ejemplo, experimentos aleatorios y otras actividades de geometría, álgebra y probabilidad.

- [illegible] (consulta: 21 de mayo de 2018, 17: 32 h) En esta dirección podrás consultar materiales sobre perímetros y áreas de polígonos regulares y del círculo, volúmenes de prismas y cilindros, entre otros temas.

- [illegible] (consulta: 21 de mayo de 2018, 17: 40 h) En este sitio encontrarás materiales interactivos sobre potencias y raíces de números enteros, operaciones con fracciones y proporcionalidad inversa, y otros contenidos abordados en el libro.

MATEMÁTICAS 2

En **Matemáticas 2** de la serie **Espiral del Saber** encontrarás problemas y actividades interesantes para explorar y buscar distintas estrategias de solución, así como para evaluar y comunicar tus procedimientos y resultados.Tendrás oportunidad de intercambiar ideas y propuestas con tus compañeros, es decir, de realizar trabajo colaborativo. De esta manera enriquecerás tu conocimiento y descubrirás que hay diversas maneras de abordar problemas y que el aprendizaje no es un camino recto, si no en espiral.

serie espiral del saber

SANTILLANA Secundaria

santillanacontigo.com.mx